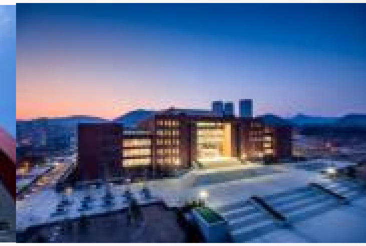
最优化理论
Optimality Theory




目 录 (CONTENT)

02 PART TWO

线性规划

Linear Programming

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 主要内容

- 线性规划标准形式
- 线性规划图解法
- 线性规划的基本性质
- 最优基本可行解
- 基本可行解的存在问题

■ 食谱问题(回顾)

我每天要求一定量的两种维生素，Vc和Vb。
假设这些维生素可以分别从牛奶和鸡蛋中得到。

维生素	奶中含量	蛋中含量	每日需求
V*c*(mg)	2	4	40
V*b*(mg)	3	2	50
单价($)	3	2.5	

需要确定每天喝奶和吃蛋的量，
目标以便以最低可能的花费购买这些食物，
而**满足**最低限度的维生素需求量。

■ 食谱问题(回顾)

令x表示要买的奶的量，y为要买的蛋的量。食谱问题可以写成如下的数学形式：

$\text{Min} \quad 3x + 2.5y$	极小化目标函数
$\text{s.t.} \quad 2x + 4y \geq 40$	
$3x + 2y \geq 50$	可行区域
$x, y \geq 0.$	可行解

建立关于何时出现最小费用(或者最大利润)的排序，或者计划，早期被标示为**规划**。

求最优安排或计划的问题，称作**规划问题**。

1. 标准形式

称如下形式的线性规划为标准形式

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=1,2,\ldots m$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\ldots n \qquad (2.1)$$

矩阵表示

$$\min \ cx$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b, \qquad (2.2)$$

$$x \geq 0,$$

其中A是m×n矩阵，c是n维行向量， b是m维列向量。

注：为计算需要，一般假设b≥0.否则，可在方程两端乘以(-1)即可化为非负。

■ 1. 标准形式

任意非标准形式均可化为标准形式，如

$$
\begin{aligned}
\min\quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots n
\end{aligned}
$$

■ 1. 标准形式

引入松弛变量$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots x_{n+m}$,则有

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots n + m \end{aligned}$$

若某变量x_j无非负限制,则引入

$$x_j = x_j' - x_j'', \qquad x_j', x_j'' \geq 0.$$

若有上下界限制,比如$x_j \geq l_j$,令$x_j' = x_j - l_j$,有$x_j' \geq 0$.

■ 2. 图解法

当自变量个数少于3时,可以用较简便的方法求解.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 3x + 2.5y \\ \text{s.t.} \quad & 2x + 4y \geq 40 \\ & 3x + 2y \geq 50 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

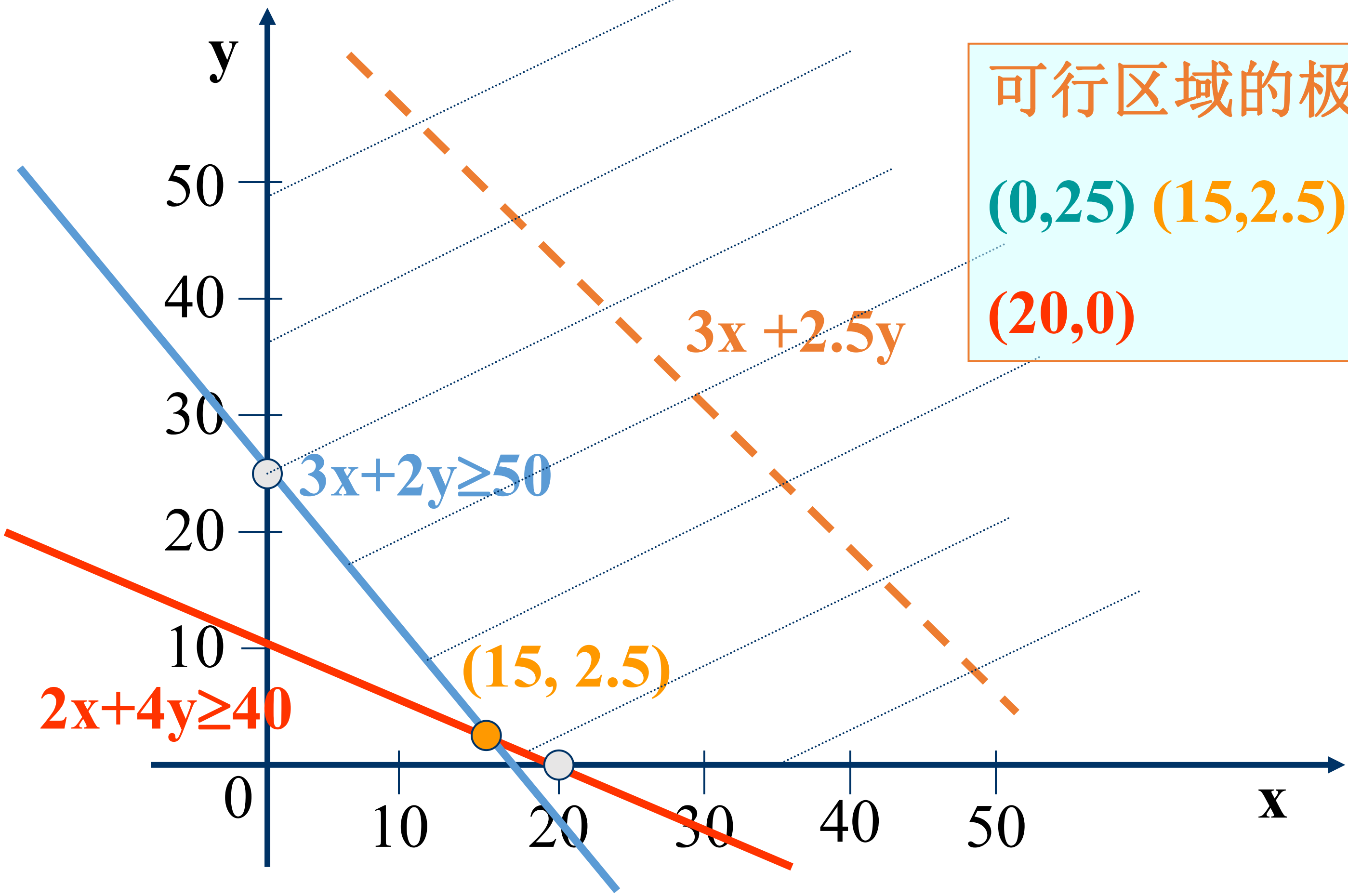
可行区域的极点:

(0,25) (15,2.5)

(20,0)

■ 2. 图解法

当自变量个数少于3时,可以用较简便的方法求解.



可行区域的极点:

(0,25) (15,2.5)

(20,0)

■ 3. 基本性质

3.1 线性规划的可行域

定理 2.2 线性规划的可行域是凸集.

3.2 最优极点

观察上例，最优解在极点(15,2.5)达到，有如下事实:
线性规划若存在最优解,则最优解一定可在某极点上达到.

3. 基本性质

证明： 考察线性规划的标准形式

设可行域的极点为$x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k)}$，极方向为$d^{(1)},d^{(2)},\ldots,d^{(t)}$。

根据表示定理，任意可行点x可表示为

$$x=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}\lambda_i x^{(\mathrm{i})}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{t}}\mu_i d^{(\mathrm{i})} \qquad (2.3)$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}}\lambda_i=1$$

$$\lambda_i\geq 0,\quad i=1,2,\ldots,k$$

$$\mu_i\geq 0,\quad i=1,2,\ldots,t.$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 3. 基本性质

把x的表达式代入(2. 2), 得等价的线性规划:

$$\min \sum_{i=1}^{k}(cx^{(i)})\lambda_i + \sum_{i=1}^{t}(cd^{(i)})\mu_i \qquad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \ge 0, \quad i = 1,2,\dots,k$$

$$\mu_i \ge 0, \quad i = 1,2,\dots,t.$$

1, 若有某j, 使得$cd^{(j)} < 0$, 则有$cd^{(j)}\mu_j \to -\infty(\mu_j \to +\infty)$

从而问题的目标函数值可以无限小($\to -\infty$)。

此时我们称该问题是无界的或不存在有限最优解。

大连理工大学 Dalian University Of Technology

3. 基本性质

2, 若对任意的j, 有$cd^{(j)} \geq 0$, 则对极小化目标函数,

必有 $\mu_j = 0, \ j = 1, 2, \ldots, t.$ (2.5)

于是, 问题简化成

$$\min \sum_{i=1}^{k} (cx^{(i)}) \lambda_i \qquad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

在(2.6)中令

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

显然, 当 $cx^{(p)} = \min_{1 \leq i \leq k} cx^{(i)}$ (2.7)

$\lambda_p = 1, \lambda_j = 0, j \neq p$ (2.8) 时目标函数取极小值.

3. 基本性质

即(2.5)和(2.8)是(2.4)的最优解,此时

$$cx=\sum_{i=1}^{k}(cx^{(i)})\lambda_i+\sum_{i=1}^{t}(cd^{(i)})\mu_i$$

$$\geq\sum_{i=1}^{k}(cx^{(i)})\lambda_i\geq\sum_{i=1}^{k}(cx^{(p)})\lambda_i \quad =cx^{(p)}$$

因此极点$x^{(p)}$是问题(2.2)的最优解.

■ 3. 基本性质

定理 2.3 设线性规划(2.2)的可行域非空,则

1,**(2.2)存在最优解的充要条件是所有 $\mathbf{cd}^{(j)}$ 非负,**

其中 $\mathbf{d}^{(j)}$是可行域的极方向.

2,若(2.2)存在有限最优解,则目标数的最优值可在某极点达到.

■ 4. 最优基本可行解

通过前面讨论，我们知道最优解可在极点达到，而极点是一几何概念，下面从代数的角度来考虑。

$$
\begin{aligned}
&\min \quad cx \\
&\text{s.t.} \quad Ax = b, \\
&\qquad\quad x \geq 0, \qquad\qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

不失一般性, 设rank(A)=m,A=[B,N],B是m阶可逆的.

设 $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ 　x_B的分量与B中列对应;

x_N的分量与N中列对应

■ 4. 最优基本可行解

于是,Ax=b可写为

$$(B,N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

即

$$Bx_B + Nx_N = b \qquad (2.9)$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

特别的令 $x_N=0$,则

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

■ 4. 最优基本可行解

定义2.6 $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$称为方程组Ax=b的一个**基本解.**

B称为**基矩阵,** x_B的各分量称为**基变量.**

基变量的全体$x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ 称为**一组基.**

x_N 的各分量称为非**基变量.**

$x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 为约束条件Ax=b,x≥0的一个**基本可行解. B**称为**可行基矩阵**

$x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ 称为**一组可行基.**

■ 4. 最优基本可行解

若$B^{-1}b>0$,称基本可行解是**非退化**的.

若$B^{-1}b\geq 0$且至少有一个分量为0,称基本可行解是**退化**的.

例1, 求出约束为

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1,x_2 \geq 0 \end{cases}$$的所有基本可行解.

解:A=(1,1),注意到,任意一基矩阵是A的可逆子矩阵

于是,容易知道,A仅有两个一元矩阵(1) 从而得所有

的基本解为$x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,它们都是基本可行解.

4. 最优基本可行解

例2, 求出约束为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2=1/2 \\ x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{cases}$$ 的所有基本可行解.

$$解: A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ 均可逆

■ 4. 最优基本可行解

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$x^1 = B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} > 0$$

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} > 0$$

■ 4. 最优基本可行解

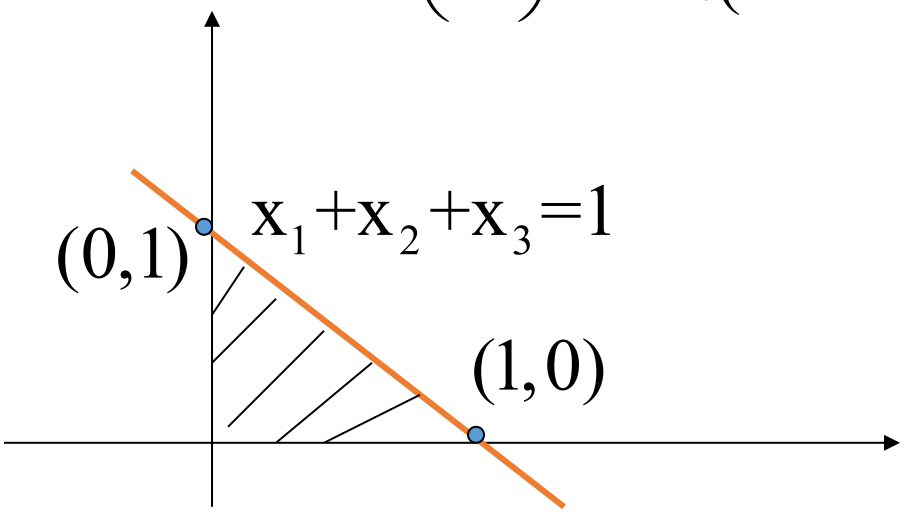
$$B_3^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$x^3=B_1^{-1}b=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\ 3/2\end{pmatrix}$$

可见,x^1,x^2是非退化的基本可行解,而x^3不是非负的,从而不是基本可行解.

■ 4. 最优基本可行解

- 容易知道，基矩阵的个数是有限的，因此基本解从而基本可行解的个数也是有限的，不超过 $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$



$\boxed{\text{基本可行解}} \updownarrow \boxed{\text{极点}}$

■ 4. 最优基本可行解

- 总结,线性规划存在最优解,目标函数的最优值一定能在某极点上达到.
- 可行域$S=\{x|\ Ax=b,x\geq 0\}$的极点就是其基本可行解.

从而,求线性规划的最优解,

只需要求出最优基本可行解即可.

■ 5. 存在性

3.5 基本可行解的存在问题

定理 2.5 **若$Ax=b, x\geq 0$有可行解,则一定存在基本可行解,** 其中A是秩为m的m×n矩阵.

证明:记 $A=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

设 $x=(x_1, x_2, \ldots, x_s, 0, 0, \ldots, 0)^T$是一可行解,

其中$x_j > 0, j=1, 2, \ldots s.$

若x的s个正分量对应的列$p_1, p_2, \ldots, p_s$线性无关,则可以将其扩充为一组基,从而得x即一基本可行解.

■ 5. 存在性

否则, 我们通过如下步骤构造出一基本可行解

假设$p_1, p_2, \ldots, p_s$线性相关, 则存在一组不全为零的数(且至少有一个为正)$\gamma_j, j = 1, 2, .., s$ 使得 $\sum_{j=1}^{s} \gamma_j p_j = 0$

我们构造$\hat{x}$如下:

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \lambda \gamma_j, j = 1, 2, .., s \\ 0, \quad j = s+1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

由于$\{\gamma_j\}$中至少一个为正, 故令

$$\lambda = \min\{\frac{x_j}{\gamma_j} \Big| \gamma_j > 0\} = \frac{x_k}{\gamma_k}$$

■ 5. 存在性

于是 $\hat{x}_j = x_j - \frac{x_k}{\gamma_k}\gamma_j \geq 0, j = 1, 2, .., s$

且特别的有

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{x_k}{\gamma_k}\gamma_k = 0$$

容易验证 $A\hat{x} = b$

于是 $\hat{x}$ 是可行解, 其正分量比 x 至少少1, 若 $\hat{x}$ 正分量对应的列向量线性无关, 则它为基本可行解, 否则重复上述步骤最终将获得一个基本可行解.

大连理工大学 Dalian University Of Technology

小结

- 线性规划标准形式
- 线性规划图解法
- 线性规划的基本性质
- 最优基本可行解
- 基本可行解的存在问题

小结和作业

- 作业
  - 习题 1、2、3