最优化理论
Optimality Theory

目 录 (CONTENT)

03 PART THREE

单纯形方法

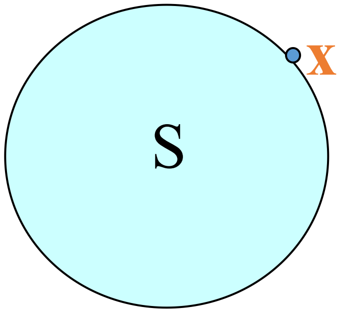
Simplex Method

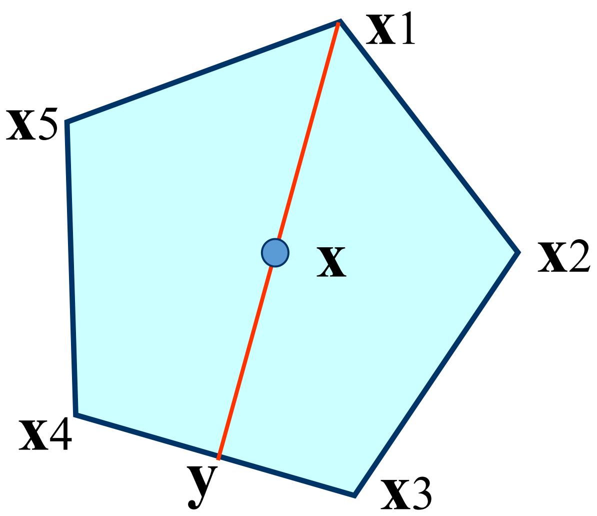
主要内容

- 单纯形方法原理
- 两阶段法和大M方法
- 退化情形
- 修正单纯形方法

■ 1. 基本可行解(回顾)

定义 1.1 非空凸集中的点x称为**极点**,若 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$, $\lambda\in(0,1)$, x_1 ,$x_2\in S$, 则 $x=x_1=x_2$.换言之,x不能表示成S中两个不同点的凸组合.





由上可知, 任何有界凸集中任一点都可表成极点的凸组合.

1. 基本可行解(回顾)

我们知道最优解可在极点达到，而极点是一几何概念，下面从代数的角度来考虑。

$$
\begin{aligned}
&\min \quad cx \\
&\text{s.t.} \quad Ax = b, \\
&\qquad\quad x \geq 0, \qquad\qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

不失一般性, 设rank(A)=m,A=[B,N],B是m阶可逆的.

设 $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ x_B的分量与B中列对应;

x_N的分量与N中列对应

■ 1. 基本可行解(回顾)

于是, Ax=b可写为

$$(B, N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

即

$$Bx_B + Nx_N = b \qquad (2.9)$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

特别的令 $x_N=0$,则

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 1. 基本可行解

定义2.6 $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$称为方程组Ax=b的一个**基本解.**

B称为**基矩阵,** x_B的各分量称为**基变量.**

基变量的全体$x_{B_1},x_{B_2},\ldots,x_{B_m}$ 称为**一组基.**

x_N 的各分量称为非**基变量.**

$x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 为约束条件Ax=b,x≥0的一个**基本可行解. B**称为**可行基矩阵**

$x_{B_1},x_{B_2},\ldots,x_{B_m}$ 称为**一组可行基.**

■ 1. 最优基本可行解

若$B^{-1}b>0$,称基本可行解是**非退化**的.

若$B^{-1}b\geq 0$且至少有一个分量为0,称基本可行解是**退化**的.

例1, 求出约束为

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$ 的所有基本可行解.

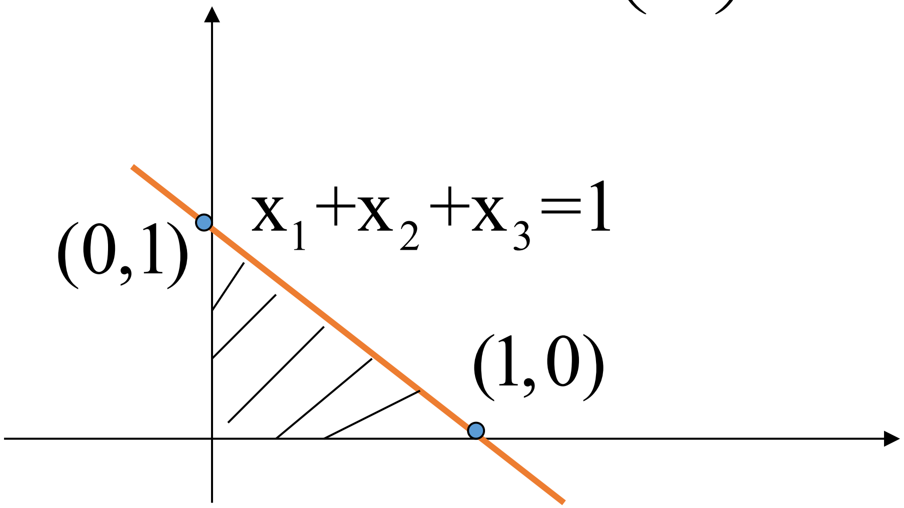
解:A=(1,1),注意到,任意一基矩阵是A的可逆子矩阵

于是,容易知道,A仅有两个一元矩阵(1) 从而得所有

的基本解为$x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,它们都是基本可行解.

■ 1. 基本可行解

- 容易知道，基矩阵的个数是有限的，因此基本解和基本可行解的个数也是有限的，不超过 $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$



基本可行解

$\updownarrow$

极点

■ 1. 基本可行解

- 总结, 线性规划存在最优解, 目标函数的最优值一定能在某极点上达到.
- 可行域 $K=\{x \mid Ax=b, x \geq 0\}$ 的极点就是其基本可行解.

从而, 求线性规划的最优解, 只需要求出最优基本可行解即可.

■ 1. 基本可行解

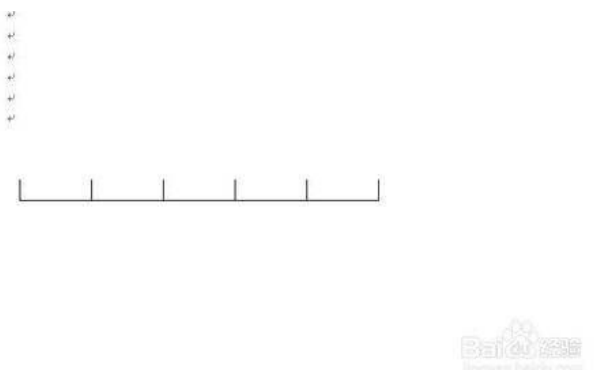
定理2. 5 若$Ax=b, x\geq 0$有可行解,则一定存在基本可行解,其中A是秩为m的$m\times n$矩阵.

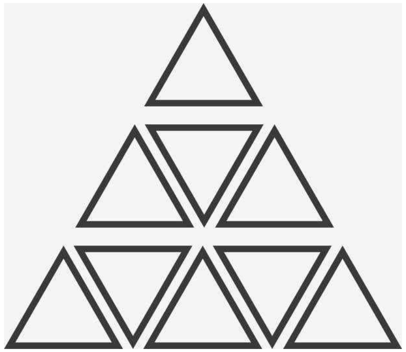
■ 单纯形法基本思路

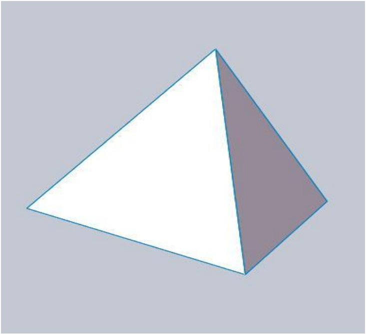
单纯形是代数拓扑中最基本的概念。

一般把一个拓扑对象剖分成许多个小的单纯形，要求任何两个相邻的单纯形相交的公共部分仍是一个单纯形——这种剖分称为（曲）单纯剖分。

在曲面情形，就是熟知的三角剖分。



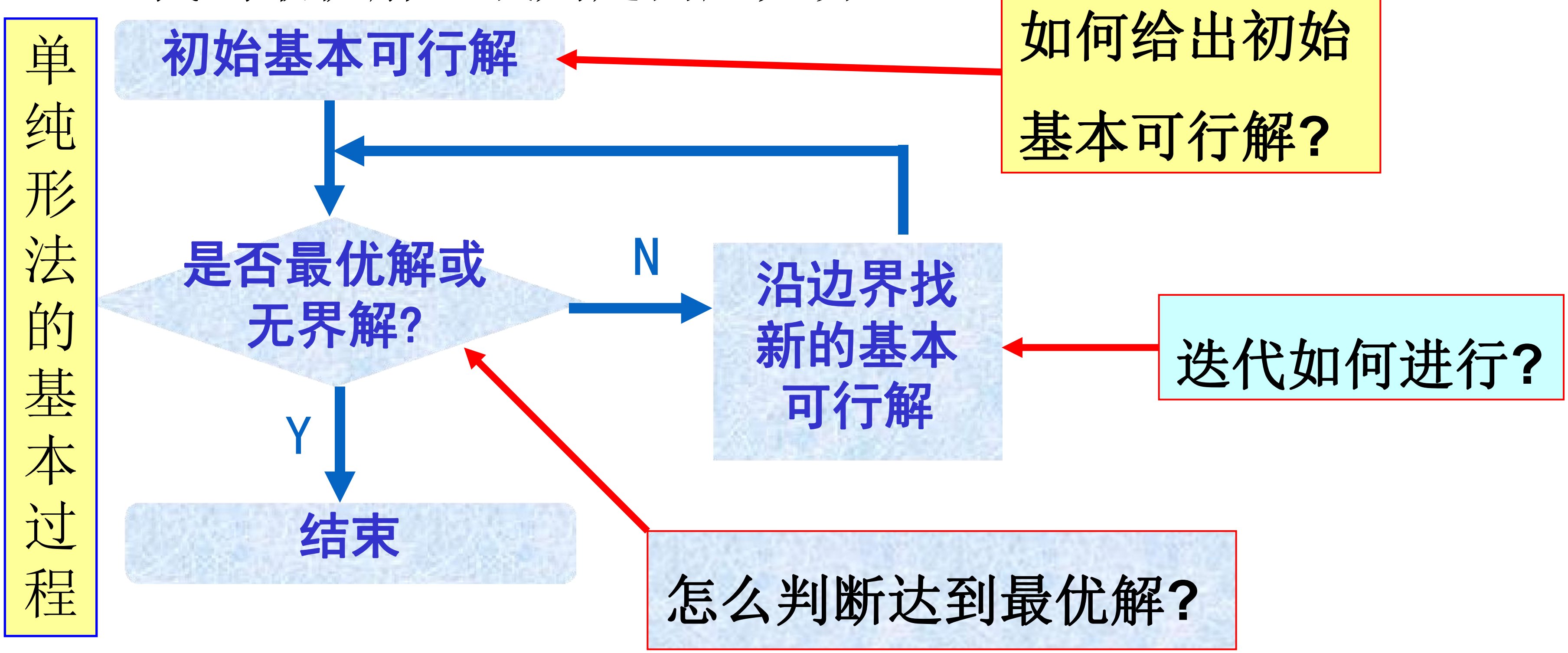




一维单纯形为线段；二维单纯形为三角形；三维单纯形为四面体。

■ 单纯形法基本思路

有选择地取(而不是枚举所有的)基本可行解，即是从可行域的一个顶点出发，沿着可行域的边界移到另一个相邻的顶点，要求新顶点的目标函数值不比原目标函数值差，如此迭代，直至找到最优解，或判定问题无界。



■ 基本思路

给定线性规划的标准形式

$$
\begin{aligned}
&\min \quad cx \\
&s.t. \quad Ax = b, \quad i = 1,2,\ldots m \\
&\qquad x \geq 0, \qquad\qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

$x = (x_B, x_N)$任一可行解，x_B为基变量，x_N为非基变量

利用分块矩阵

$$A = [B, N]$$

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

$$\Rightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}x_N$$

■ 基本思路

于是目标函数

$$
\begin{aligned}
z &= c'_B x_B + c'_N x_N \\
&= c'_B (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c'_N x_N \\
&= c'_B B^{-1} b + (c'_N - c'_B B^{-1} N) x_N
\end{aligned}
$$

$(c'_N - c'_B B^{-1} N)$的分量$\bar{c}_j = c_{\mathrm{j}} - c'_B B^{-1} A_j$:约化(缩减)费用

于是有

- 基本可行解x与基矩阵B关联;

$\bar{c}$:约化费用, 若$\bar{c} \geq 0 \Rightarrow x$为最优;

x为最优且非退化$\Rightarrow \bar{c} \geq 0$。

■ 基本思路

于是我们有如下定理：

Th3.1 若$x^* \in S$是一个基本可行解，并且其对应的既约费用向量$\overline{c}_j \geq 0$,则x^*是LP的一个最优基本可行解。

证明:若 y是任意可行解，则

$$d = y - x, Ax = Ay = b \Rightarrow Ad = 0$$

$$\Rightarrow Bd_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$$

$$\Rightarrow d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A_i d_i$$

$$\Rightarrow c'd = c'_B d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c'_B B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \overline{c}_i d_i$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 基本思路

$$\because \quad y \geq 0 \text{且} x_i = 0, i \in N,$$

$$\therefore \quad d_i = y_i - x_i \geq 0, i \in N$$

$$\therefore \quad c'd = c'(y - x) \geq 0 \Rightarrow c'y \geq c'x$$

$$\Rightarrow x \text{为最优。}$$

由上知, 要减少费用, 只有当 $\overline{c}_j < 0$ 时才可能

$$\overline{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j < 0$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 基本思路

假设$\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j < 0$

$$z = c_B' x_B + c_N' x_N = c_B' (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c_N' x_N$$

$$= c_B' B^{-1} b + (c_N' - c_B' B^{-1} N) x_N = c_B' B^{-1} b + (c_j - c_B' B^{-1} A_j) x_j$$

$$+ (c_{N\setminus\{A_j\}}' - c_B' B^{-1} (N \setminus A_j)) x_{N\setminus\{A_j\}}$$

若让上式x_j增加，即取新的可行解$y = x + \Delta x$，

则可降低目标值。$\Delta x = ?$

大连理工大学 Dalian University of Technology

■ 基本思路

若让上式x_j增加，即取新的可行解$y = x + \Delta x$，

则可降低目标值。$\Delta x = ?$

让 $d_B = -B^{-1}A_j, d_j = 1, d_i = 0, i \neq B(1), B(2), .. B(m), j$.其中$B(1)$, $B(2), .. B(m)$是基矩阵B对应的列指标. 于是由它组成向量d.

令 y=x+θd, θ>0，我们能降低费用吗？

$$c'y - c'x = \theta c'd = \theta(c'_B d_B + c_j d_j)$$

$$=\theta(c_j - c'_B B^{-1} A_j) = \theta \bar{c}_j < 0$$

因此，若$\bar{c}_j < 0$,费用将减少。

■ 基本思路

一个自然的问题是$y=x+\theta d$可行吗？

$$\because \quad Ad=0 \Rightarrow Ay=Ax=b;$$

下一个问题$y\geq 0$吗？

1.若$d\geq 0, \Rightarrow y=x+\theta d\geq 0.$

于是可以任意减小费用,从而问题无下界,于是有如下定理.

■ 基本思路

记$d^j = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_j \\ e_j \end{pmatrix}$-边方向,$D = (d^j)_{j \in N} = \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ I_N \end{pmatrix}$

$Th3.2$ 设x^*是LP的基本可行解，既约费用向量

$$\bar{c} = (c^T - c_B^T B^{-1} A)^T = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n),$$

若与非基变量x_j对应的判别数$\bar{c}_j < 0$,且可行的边方向d^j(形式见上)存在，则沿此方向移动可以减小目标函数值，特别的,$d^j \geq 0$时LP无下界。

■ 基本思路

2. 若 $d \ngeq 0, y = x + \theta d$ 可 行 吗 ?

显 然 要 看 θ 怎 样 取 值 了 。

若 $\exists d_i < 0$,则要让y可行,必需

$$x_i + \theta d_i \geq 0 \Rightarrow \theta \leq -\frac{x_i}{d_i}, i \in N$$

$$\therefore \quad \theta^* = \min_{\{i:d_i<0\}} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\} = \min_{\{i=1,2,..,m:d_{B(i)}<0\}} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\}$$

正确性如何?

显然按上述取法，是可以保证y≥0的。y还是基本可行解吗?

■ 基本思路

$$-\frac{x_{\mathrm{B(t)}}}{d_{\mathrm{B(t)}}} = \min_{\{i=1,2,..,m:d_{B(i)}<0\}} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\} = \theta^*$$

-----最小比值原则

Th3.3 设x^*为LP的BFS，若非基变量x_q对应的判别数$\bar{c}_q < 0$,并且边方向$d^q \geq$是一个可行方向，则按最小比值检验的步长机制将产生一个新的BFS，使得目标函数值减小。

大连理工大学 Dalian University Of Technology

基本思路

单纯形法

步1: 找出初始可行基$B=[A_{B(1)},A_{B(2)},\ldots,A_{B(m)}]$及初始可行解$x$;

步2: 计算$\bar{c}_j=c_j-c_B'B^{-1}A_j$

若$\bar{c}_j\geq 0$，x则为最优解，停止

否则，选取j，$\bar{c}_j<0$.

步3: 计算$\mathrm{u}=-\mathrm{d}=B^{-1}A_j$

若$\mathrm{u}<0$，x则费用无界，停止

否则，$\theta^*=\min_{i=1,2,..,m:\mathrm{u}_i>0}\left\{\dfrac{x_{\mathrm{B}(i)}}{\mathrm{u}_i}\right\}=\dfrac{x_{\mathrm{B(t)}}}{\mathrm{u}_\mathrm{t}}$

步4: 用A_j替代$A_{B(t)}$,得一新的基,

$y_j=\theta^*$，$y_{B(i)}=x_{B(i)}-\theta^* u$得新可行解$y$，转步1。

■ 求解例子

- 例1

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\
s.t.\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\
& x_1 \le 2 \\
& x_3 \le 3 \\
& 3x_2 + x_3 \le 6 \\
& x_i \ge 0, i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\
s.t.\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1 + x_5 = 2 \\
& x_3 + x_6 = 3 \\
& 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\
& x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,7
\end{aligned}
$$

化为标准型

■ 求解例子

- 例1

$$
\begin{aligned}
&\min x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\
&s.t.\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
&\qquad x_1 + x_5 = 2 \\
&\qquad x_3 + x_6 = 3 \\
&\qquad 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\
&x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}
$$

求解例子

- 例1

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$B=[A_1, A_3, A_6, A_7]$$

基矩阵 $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

■ 求解例子

- 例1

$$
\begin{array}{ccccccc}
A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \\
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}
$$

基矩阵 $\mathrm{B}=[\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_6, \mathrm{A}_7]$

基本可行解BFS: $x = (2\ 0\ 2\ 0\ 0\ 1\ 4)^{\mathrm{T}}$

$$
\mathrm{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_{\mathrm{B}} \\ \mathrm{x}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}^{-1}\mathrm{b} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

■ 求解例子

- 例1

$B=[A_1,A_3\ ,A_6,A_7]$

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&-1&0&0\\-1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{bmatrix},$$

$$\bar{c}=(0\ \ 7\ \ 0\ \ 2\ \ -3\ \ 0\ \ 0)^{T} \qquad \bar{c}_j=c_j-c_B'B^{-1}A_j$$

$$r_5=-3<0,x_5\text{入基} \qquad \bar{c}=(c^T-c_B^TB^{-1}A)^T=(\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_n),$$

■ 求解例子

- 例1

$$d_5 = 1, d_2 = d_4 = 0, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_6 \\ d_7 \end{pmatrix} = -B^{-1}A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y^T = x^T + \theta d^T = (2-\theta \quad 0 \quad 2+\theta \quad 0 \quad \theta \quad 1-\theta \quad 4-\theta)$$

$$\theta^* = \min_{\{i=1,2,..,m:d_{B(i)}<0\}} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_i} \right\} = \min\left(-\frac{2}{-1}, -\frac{1}{-1}, -\frac{4}{-1} \right)$$

此时, $l = 6$， x_6出基

■ 求解例子

- **例1** 新的解:$y=(1\ 0\ 3\ 0\ 1\ 0\ 3)^T$

新的基：$\overline{B}=(A_1,A_3,A_5A_7)$

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&1&0\\-1&1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix},$$

$$\overline{c}'=c'-c'_{\overline{B}}B^{-1}A=(0\ 4\ 0\ -1\ 0\ 3\ 0)$$

$r_4=-1<0, x_4$入基

■ 求解例子

- 例1

$$D=\begin{pmatrix}-B^{-1}N\\ I_N\end{pmatrix},-B^{-1}A_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_3\\d_5\\d_7\end{pmatrix}$$

$$d_4=1,d_2=d_6=0$$

$$\theta'=-\frac{1}{-1},l=5,x_5\text{出基}$$

$$y'=(2,0,3,1,0,0,3)$$

■ 求解例子

- 例1

新的基为B=(A_1, A_3, A_4, A_7)

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix},B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&-1&-1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\overline{c}=c-c_B B^{-1}A=(0,5,0,0,-1,2,0)$$

$r_5=-1, x_5$入基

■ 求解例子

- 例1

$$D=\begin{pmatrix}-B^{-1}N\\ I_N\end{pmatrix},-B^{-1}A_5=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_3\\d_4\\d_7\end{pmatrix}$$

$$d_5=1,d_2=d_6=0$$

$$\theta'=-\frac{2}{-1},l=1,x_1\text{出基}$$

$$y'=(0,0,3,3,2,0,3)$$

■ 求解例子

- 例1

新的基为B=(A_3, A_4, A_5, A_7)

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},B^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\overline{c}=c-c_B B^{-1}A=(1,5,0,0,0,2,0)$$

诸$r_i\geq 0$,故$y'=(0,0,3,3,2,0,3)$为最优解。

■ 表格法

- 表格形式的单纯形方法

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}x_N$代入上述规划得等价形式:

$$
\begin{aligned}
& \min \quad f \\
s.t.\quad & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \\
& f + 0 \cdot x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b \\
& x_B \geq 0, x_N \geq 0
\end{aligned}
$$

■ 表格法

	f	x_B	x_N	右端
x_B	0	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
f		0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad f \\
&s.t. \quad x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \\
&\qquad f + 0 \cdot x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b \\
&\qquad x_B \geq 0, x_N \geq 0
\end{aligned}
$$

表格法

$$
\text{记} B^{-1}N = B^{-1}(A_{N(1)}, A_{N(2)}, \ldots, A_{N(n\text{-}m)})
$$
$$
= (B^{-1}A_{N(1)}, B^{-1}A_{N(2)}, \ldots, B^{-1}A_{N(n\text{-}m)})
$$
$$
= (y_{N(1)}, y_{N(2)}, \ldots, y_{N(n\text{-}m)})
$$

$$
B^{-1}b = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_3),
$$
$$
(c_B B^{-1}N - c_N)_j = (c_B B^{-1}A_j - c_j) = -\overline{c}_j = (z_j - c_j)
$$

■ 表格法

单纯形表

右端向量

离基变量

进基变量

	x_1	…	x_r	…	x_m	x_{m+1}	…	x_k	…	x_n	RHS
	0	…	0	…	0	$-\bar{c}_{m+1}$	…	$-\bar{c}_k$	…	$-\bar{c}_n$	z_0
x_1	1	…	0	…	0	$\bar{a}_{1m+1}$	…	$\bar{a}_{1k}$	…	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r	0	…	1	…	0	$\bar{a}_{rm+1}$	…	$\bar{a}_{rk}^*$	…	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	…	0	…	1	$\bar{a}_{mm+1}$	…	$\bar{a}_{mk}$	…	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

旋转元

■ 表格法

例2： 求解线性规划问题

$$
\begin{array}{lllllll}
\max & z= & 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & +2x_4 & \\
\text{s.t.} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leqq 25 \\
 & & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leqq 36 \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \geqq 0
\end{array}
$$

化成标准化形式

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & z'= & -3x_1 & -4x_2 & +x_3 & -2x_4 & & & \\
\text{s.t.} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & =25 \\
 & & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & & +x_6 & =36 \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \geqq 0
\end{array}
$$

■ 表格法

$$\min \quad z' = -3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 25 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 &= 36 \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 &\geqq 0 \end{aligned}$$

写出单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z'	3	4	-1	2	0	0	0
x_5	1	1	1	1	1	0	25
x_6	1	2	1	2	0	1	36

x_2进基， x_6离基，

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	3	4	-1	2	0	0	0	
x_5	1	1	1	1	1	0	25	25/1
x_6	1	2	1	2	0	1	36	36/2

x_2进基， x_6离基，

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	1	0	−3	−2	0	−2	−72	
x5	1/2	0	1/2	0	1	−1/2	7	7/0.5
x2	1/2	1	1/2	1	0	1/2	18	18/0.5

x_1进基， x_5离基，

■ 表格法

z'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z'	0	0	−4	−2	−2	−1	−86
X_1	1	0	1	0	2	−1	14
x_2	0	1	0	1	−1	1	11

得到最优解，最优解为：

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=(14,11,0,0,0,0)$$

$\min z'=-86$， $\max z=86$

■ 表格法

例3： 求解线性规划问题

$$
\begin{array}{llrrrl}
\max & z= & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \\
\text{st} & & x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq 15 \\
 & & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq 18 \\
 & & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 3 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrrrrrrl}
\min & z'= & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 & & & & \\
\text{st} & & x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & =15 \\
 & & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & & +x_5 & & =18 \\
 & & x_1 & -x_2 & +x_3 & & & +x_6 & =3 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0
\end{array}
$$

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z’	2	3	1	0	0	0	0	
x_4	1	[3]	1	1	0	0	15	15/3
x_5	2	3	-1	0	1	0	18	18/3
x_6	1	-1	1	0	0	1	3	-

x2进基，x4离基

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	1	0	0	-1	0	0	-15	
x_2	1/3	1	1/3	1/3	0	0	5	5/1/3
x_5	[1]	0	-2	-1	1	0	3	3/1
x_6	4/3	0	4/3	1/3	0	1	8	8/4/3

x1进基，x5离基

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	0	0	2	0	-1	0	-18	
x_2	0	1	1	2/3	-1/3	0	4	4/1
x_1	1	0	-2	-1	1	0	3	--
x_6	0	0	[4]	5/3	-4/3	1	4	4/4

x3进基，x6离基

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z’	0	0	0	-5/6	-1/3	-1/2	-20
x_2	0	1	0	1/4	0	-1/4	3
x_1	1	0	0	-1/6	1/3	1/2	5
x_3	0	0	1	5/12	-1/3	1/4	1

最优解:$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5x_6)=(5,3,1,0,0,0)$,　max $z=20$

初始单纯型表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	2	3	1	0	0	0	0	
x_4	1	[3]	1	1	0	0	15	15/3
x_5	2	3	-1	0	1	0	18	18/3
x_6	1	-1	1	0	0	1	3	-

$$(B,I)\rightarrow(I,B^{-1})$$

$$B=\begin{pmatrix}A_2 & A_1 & A_3\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_2 & x_1 & x_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

最优单纯型表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z'	0	0	0	-5/6	-1/3	-1/2	-20
x_2	0	1	0	1/4	0	-1/4	3
x_1	1	0	0	-1/6	1/3	1/2	5
x_3	0	0	1	5/12	-1/3	1/4	1

最优解:$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5x_6)=(5,3,1,0,0,0)$, max $z=20$

小结和作业

■ 第五次作业

- 118页习题 1、2、3、4

小结和作业

小结

- 线性规划基本可行解回顾
- 线性规划单纯形理论
- 线性规划单纯形解法
- 例子