最优化理论
Optimality Theory

目 录 (CONTENT)

03

PART THREE

单纯形方法

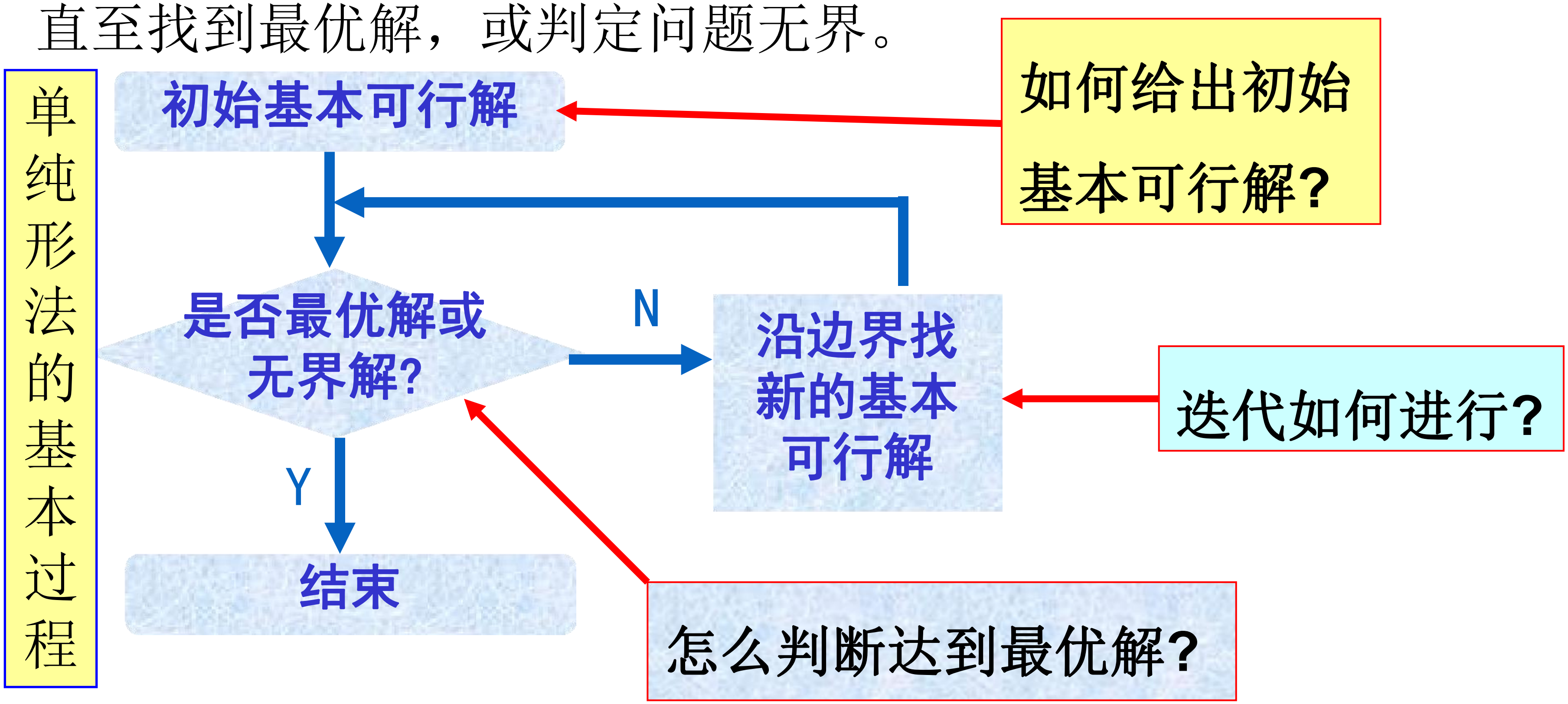
Simplex Method

■ 主要内容

- 单纯形方法原理
- 两阶段法和大M方法
- 退化情形
- 修正单纯形方法

■ 单纯形法基本思路

有选择地取(而不是枚举所有的)基本可行解，即是从可行域的一个顶点出发，沿着可行域的边界移到另一个相邻的顶点，要求新顶点的目标函数值不比原目标函数值差，如此迭代，直至找到最优解，或判定问题无界。



■ 表格法

- 表格形式的单纯形方法

$$\min \quad cx$$

$$s.t. \qquad Ax = b, \qquad i = 1,2,\ldots m$$

利用分块矩阵

$$x \geq 0, \qquad (3.1)$$

$A = [B, N]$，$x = (x_B, x_N), x_B$为基变量,x_N为非基变量

于是(3.1)等价于

$$\min \quad f$$

$$s.t. \quad f - c_B x_B - c_N x_N = 0$$

$$B x_B + N x_N = b$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0$$

■ 表格法

- 表格形式的单纯形方法

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}x_N$代入上述规划得等价形式:

$$\begin{aligned} &\min \quad f \\ s.t.\quad & x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \\ & f + 0\cdot x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b \\ & x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

■ 表格法

	f	x_B	x_N	右端
x_B	0	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
f		0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad f \\
&s.t. \quad x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b, \\
&\qquad f + 0\cdot x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b \\
&\qquad x_B \ge 0, x_N \ge 0
\end{aligned}
$$

■ 表格法

$$\text{记} B^{-1}N = B^{-1}(A_{N(1)}, A_{N(2)}, \dots, A_{N(n\text{-}m)})$$

$$= (B^{-1}A_{N(1)}, B^{-1}A_{N(2)}, \dots, B^{-1}A_{N(n\text{-}m)})$$

$$= (y_{N(1)}, y_{N(2)}, \dots, y_{N(n\text{-}m)})$$

$$B^{-1}b = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_3),$$

$$(c_B B^{-1}N - c_N)_j = (c_B B^{-1}A_j - c_j) = -\bar{c}_j = (z_j - c_j)$$

■ 表格法

单纯形表

右端向量

离基变量

进基变量

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_r & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & & RHS \\
\hline
 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\bar{c}_{m+1} & \cdots & -\bar{c}_k & \cdots & -\bar{c}_n & & z_0 \\
\hline
x_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1m+1} & \cdots & \bar{a}_{1k} & \cdots & \bar{a}_{1n} & & \bar{b}_1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_r & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{rm+1} & \cdots & \bar{a}_{rk}^{*} & \cdots & \bar{a}_{rn} & & \bar{b}_r \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_m & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{mm+1} & \cdots & \bar{a}_{mk} & \cdots & \bar{a}_{mn} & & \bar{b}_m
\end{array}
$$

旋转元

表格法

例2： 求解线性规划问题

$$
\begin{array}{llrrrrl}
\max & z= & 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & +2x_4 & \\
\text{s.t.} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leqq 25 \\
 & & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leqq 36 \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \geqq 0
\end{array}
$$

化成标准化形式

$$
\begin{array}{llrrrrrrl}
\min & z'= & -3x_1 & -4x_2 & +x_3 & -2x_4 & & & \\
\text{s.t.} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & =25 \\
 & & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & & +x_6 & =36 \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \geqq 0
\end{array}
$$

■ 表格法

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & z'= & -3x_1 & -4x_2 & +x_3 & -2x_4 & & & \\
\text{s.t.} & & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & =25 \\
 & & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & & +x_6 & =36 \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \geqq 0
\end{array}
$$

写出单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z'	3	4	-1	2	0	0	0
x_5	1	1	1	1	1	0	25
x_6	1	2	1	2	0	1	36

x_2进基， x_6离基，

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	3	4	-1	2	0	0	0	
x_5	1	1	1	1	1	0	25	25/1
x_6	1	2	1	2	0	1	36	36/2

x_2进基， x_6离基，

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	1	0	−3	−2	0	−2	−72	
x5	1/2	0	1/2	0	1	−1/2	7	7/0.5
x2	1/2	1	1/2	1	0	1/2	18	18/0.5

x_1进基， x_5离基，

■ 表格法

z'	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z'	0	0	−4	−2	−2	−1	−86
X_1	1	0	1	0	2	−1	14
x_2	0	1	0	1	−1	1	11

得到最优解，最优解为：

$(x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6)=(14,11,0,0,0,0)$

min z'=-86，　max z=86

■ 表格法

例3： 求解线性规划问题

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z= & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \\
\text{st} & & x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq 15 \\
 & & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & \leq 18 \\
 & & x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 3 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & z'= & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 & & & & \\
\text{st} & & x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & & & =15 \\
 & & 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & & +x_5 & & =18 \\
 & & x_1 & -x_2 & +x_3 & & & +x_6 & =3 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0
\end{array}
$$

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	2	3	1	0	0	0	0	
x_4	1	[3]	1	1	0	0	15	15/3
x_5	2	3	-1	0	1	0	18	18/3
x_6	1	-1	1	0	0	1	3	-

x2进基，x4离基

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	1	0	0	-1	0	0	-15	
x_2	1/3	1	1/3	1/3	0	0	5	5/1/3
x_5	[1]	0	-2	-1	1	0	3	3/1
x_6	4/3	0	4/3	1/3	0	1	8	8/4/3

x1进基，x5离基

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	0	0	2	0	-1	0	-18	
x_2	0	1	1	2/3	-1/3	0	4	4/1
x_1	1	0	-2	-1	1	0	3	--
x_6	0	0	[4]	5/3	-4/3	1	4	4/4

x3进基，x6离基

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 表格法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z'	0	0	0	-5/6	-1/3	-1/2	-20
x_2	0	1	0	1/4	0	-1/4	3
x_1	1	0	0	-1/6	1/3	1/2	5
x_3	0	0	1	5/12	-1/3	1/4	1

最优解:$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5x_6)=(5,3,1,0,0,0)$, max $z=20$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z'	2	3	1	0	0	0	0	
x_4	1	[3]	1	1	0	0	15	15/3
x_5	2	3	-1	0	1	0	18	18/3
x_6	1	-1	1	0	0	1	3	-

初始单纯型表

$$(B, I) \rightarrow (I, B^{-1})$$

$$B = (A_2 \quad A_1 \quad A_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_1 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

最优单纯型表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z'	0	0	0	-5/6	-1/3	-1/2	-20
x_2	0	1	0	1/4	0	-1/4	3
x_1	1	0	0	-1/6	1/3	1/2	5
x_3	0	0	1	5/12	-1/3	1/4	1

最优解:$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5x_6)=(5,3,1,0,0,0)$, max $z=20$

■ 两阶段法

- 单纯形法三要素：
  初始基本可行解，解的迭代，最优性检验
- 后两个已解决, 现考虑如何获得一个初始基本可行解.

（一）两阶段法

设标准LP为

$$
\begin{aligned}
&\min c^{\mathrm{T}} x \\
&s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (3.2.1)
\end{aligned}
$$

■ 两阶段法

若系数矩阵中有一个单位矩阵，则容易得到初始基可行解. 所以我们希望幸运的碰到这种矩阵.

没有的话，硬性加一个？

人工变量

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax + x_\alpha = b \\ x \geq 0, x_\alpha \geq 0 \end{cases} \qquad (3.2.2)$$

这里 $x_\alpha = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$

即 $\begin{cases} (A, \mathrm{I}_m)\begin{pmatrix} x \\ x_\alpha \end{pmatrix} = b \\ x \geq 0, x_\alpha \geq 0 \end{cases}$ $(3.2.3) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ 为 (3.2.3) 的BFS

■ 两阶段法

问题是如何由(3.2.3)的初始可行解获得原来LP的一个初始可行解？

为此，考虑如下辅助LP(第一阶段)

$$
\begin{aligned}
&\min \quad e^T x_\alpha \\
&\text{s.t.}\begin{cases} Ax + x_\alpha = b \\ x \ge 0, x_\alpha \ge 0 \end{cases} \qquad (3.2.4)
\end{aligned}
$$

这里$e=(1,1,\dots,1)^T, x_\alpha=(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$

■ 两阶段法

$$\min \; c^{\mathrm{T}} x \qquad s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

关系?

$$\min g = \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \qquad s.t. \begin{cases} Ax + x_\alpha = b \\ x \geq 0, x_\alpha \geq 0 \end{cases}$$

1. 如果原问题有可行解，则辅助问题的最优值为0，反之亦然.

2. 由于 $b \geq 0$，所以以 $x_\alpha = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$ 为基变量，

   就可以得到辅助问题的初始基可行解 $(0, b)^{\mathrm{T}}$，同时 $x_\alpha \geq 0$

   所以 $\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \geq 0$ 一定有最小值.

■ 两阶段法

利用单纯形法求得一个最优可行解. 这个解将会给我们带来什么？

设单纯形法得到(3.2.4)的最优解为$(\overline{x}^T, x_\alpha^T)^T$,则必有如下情况之一出现：

(1)$\overline{x}_\alpha \neq 0$,则原规划(3.2.1)无可行解,(反证)

(2)$\overline{x}_\alpha = 0$,且其分量都为非基变量，则$x = \overline{x}$是原规划(3.2.1)的一个基可行解.

(3)$\overline{x}_\alpha = 0$,且其分量至少有一个是基变量，则可用主元消去法使得这些人工变量出基，$x = \overline{x}$仍是原规划(3.2.1)的一个基可行解.

两阶段法

- 于是我们获得一个初始基可行解, 从而可以以此基可行解出发利用单纯形法求出最优解.

第一阶段：不考虑原LP问题是否有基可行解，添加人工变量，构造仅含人工变量的目标函数，得辅助规划(3.2.4)

单纯型法求解上述模型，若有目标函数=0，说明原问题存在初始基本可行解，转入第二阶段。否则，原问题无可行解，计算停止。

第二阶段：将第一阶段计算得到的最终表，除去人工变量，从该初始基本可行解开始，用单纯形法求原问题的最优解或判定原问题无界。

■ 两阶段法

例1　求解

$$\min z = 5x_1 + 21x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_j \geq 0;\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

写成标准化形式

$$\min z = 5x_1 + 21x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 \quad = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad - x_5 = 1 \\ x_j \geq 0;\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

■ 两阶段法

首先引入人工变量，构造辅助规划问题

第1阶段

$$\min g = x_6 + x_7$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 \quad + x_6 \quad = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad - x_5 \quad + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0; j = 1,2,3,4,5,6,7 \end{cases}$$

如果以 x_6， x_7 为基变量，则可以得到该问题的BFS $(0,0,0,0,0,2,1)^T$ ，其对应的单纯形表为

■ 两阶段法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	-5	0	-21	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_6	1	-1	6	-1	0	1	0	2
x_7	1	1	2	0	-1	0	1	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	-5	0	-21	0	0	0	0	0
g	2	0	8	-1	-1	0	0	3
x_6	1	-1	6	-1	0	1	0	2
x_7	1	1	2	0	-1	0	1	1

■ 两阶段法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	-3/2	-7/2	0	-7/2	0	7/2	0	-7
g	2/3	4/3	0	1/3	-1	-4/3	0	1/3
x_3	1/6	-1/6	1	-1/6	0	1/6	0	1/3
x_7	2/3	4/3	0	1/3	-1	-1/3	1	1/3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1/4	0	0	-21/8	-21/8	21/8	21/8	63/8
g	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_3	1/4	0	1	-1/8	-1/8	1/8	1/8	3/8
x_2	1/2	1	0	1/4	-3/4	-1/4	3/4	1/4

■ 两阶段法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1/4	0	0	-21/8	-21/8	21/8	21/8	63/8
g	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_3	1/4	0	1	-1/8	-1/8	1/8	1/8	3/8
x_2	1/2	1	0	1/4	-3/4	-1/4	3/4	1/4

第一阶段结束，得到辅助问题的一个最优解 $(0,\frac{1}{4},\frac{3}{8},0,0,0,0)^T$

同时得到原问题的一个初始基本可行解 $x^0=(0,\frac{1}{4},\frac{3}{8},0,0)^T$

■ 两阶段法

去掉人工变量对应的行、列，得到原问题的初始单纯形表，

直接开始第二阶段运算

两阶段法

第2阶段

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1/4	0	0	-21/8	-21/8	63/8
x_3	1/4	0	1	-1/8	-1/8	3/8
x_2	1/2	1	0	1/4	-3/4	1/4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	-1/2	0	-11/4	-9/4	31/4
x_3	0	-1/2	1	-1/4	1/4	1/4
x_1	1	2	0	1/2	-3/2	1/2

原问题的最优解

$$\boldsymbol{x} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0)^T,$$

其最优值为 $\frac{31}{4}$

■ 两阶段法

例2 求解

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\
s.t.\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& x_1 + x_4 = 2 \\
& 3x_1 + 2x_3 = 10 \\
& x_j \ge 0;\ j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

■ 两阶段法

解：引进人工变量进行第一阶段

$$\min \ x_5 + x_6 + x_7$$

$$\begin{aligned}
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 \quad + x_5 = 4 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_6 = 6 \\
& x_1 \quad + x_4 = 2 \\
& 3x_1 + 2x_3 \quad + x_7 = 10 \\
& x_j \geq 0; j = 1, 2, \ldots, 7
\end{aligned}$$

■ 两阶段法

单纯形法求解：

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\
\hline
x_5 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
x_6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
x_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
x_7 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
 & 6 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20
\end{array}
$$

■ 两阶段法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	−1	1	−2	1	0	0	0
x_6	0	1	1	−1	0	1	0	4
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	0	2	−3	0	0	1	4
	0	0	4	−6	0	0	0	8

■ 两阶段法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	−1	1	-2	1	0	0	0
x_6	0	2	0	1	−1	1	0	4
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	2	0	1	−2	0	1	4
	0	4	0	2	−4	0	0	8

■ 两阶段法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	1	$-3/2$	½	½	0	2
x_2	0	1	0	½	$-$ ½	½	0	2
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	0	0	0	-1	-1	1	0
	0	0	0	0	-2	-2	0	8

■ 两阶段法

第二阶段：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	2
x_1	1	0	0	1	2
	0	0	0	0	0

■ 两阶段法

第二阶段初始单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	2
x_1	1	0	0	1	2
	0	0	0	$\frac{13}{2}$	4

■ 大M法

- 前面所说的两阶段法分成两步走。能不能把这两步合并？如何合并？

设原问题为

$$\min \quad c^{T} x$$

$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

引入m个人工变量 $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ & \cdots \qquad \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ & x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots x_{n+m} \geq 0 \end{aligned}$$

■ 大M法

现在关键是如何选取目标函数，因要包含原问题，所以必须包含原目标函数。联系到两阶段法，我们要强迫人工变量取值为0，于是加上一个惩罚因子，因为是极小化，所以希望这个惩罚因子越大越好！！

在目标函数中增加$M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$项，得如下规划

$$\min z = c^{T} x + M \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i$$

$$s.t.\begin{cases} Ax + x_{\alpha} = b \\ x \geq 0, x_{\alpha} \geq 0 \end{cases}$$

■ 大M法

- 可行吗？

设原问题最优解x_0^*，最优值z_0^*；

新问题最优解x_1^*，最优值z_1^*.

直观上，因M为足够大的正数，新问题最优解对应的人工变量取值应满足 $\boldsymbol{x}_\alpha = \mathbf{0}$ ，（除非原问题不可行）

容易知道此时两个问题的目标函数值满足

$$z_0^* \le z_1^*$$

从而新LP问题的最优解对应于原问题的（基本）可行解，

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 大M法

另一方面，原问题的任意可行解x对应于辅助问题的可行解 $(x,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_0^*$ 也对应新问题的可行解 $(\boldsymbol{x}_0^*,\mathbf{0})^{\mathrm{T}}$

且两个规划目标值相等，故原问题的最优解 $z_0^* \geq z_1^*$

综合 $\therefore z_0^* = z_1^*$ $x_0^* \longleftrightarrow (x_0^*,0)^{\mathrm{T}}$

因此只需求解辅助问题就可求得原问题的最优解。

$$\boldsymbol{x}_\alpha \neq \mathbf{0} \ ?$$

■ 大M法

- 例3 求解

$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\
\text{s.t. } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\
& 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 26 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{Min } z' &= -5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \\
\text{s.t. } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\
& 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 26 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

■ 大M法

			5	2	3	-1	$-M$	$-M$	
C_B	X_B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
$-M$	x_5	15	1	2	3	0	1	0	5
$-M$	x_6	20	2	1	(5)	0	0	1	4
-1	x_4	26	1	2	4	1	0	0	6.5
$-z$		$35M+26$	$3M+6$	$3M+4$	$8M+7$	0	0	0	
$-M$	x_5	3	-1/5	(7/5)	0	0	1	-3/5	15/7
3	x_3	4	2/5	1/5	1	0	0	1/5	20
-1	x_4	10	-3/5	6/5	0	1	0	-4/5	25/3
$-z$		$3M-2$	$-M/5+16/5$	$7/5M+13/5$	0	0	0	$-8/5M-7/5$	
2	x_2	15/7	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	
3	x_3	25/7	(3/7)	0	1	0	-1/7	2/7	25/3
-1	x_4	52/7	-3/7	0	0	1	-6/7	-2/7	
$-z$		-53/7	25/7	0	0	0	$-M-13/7$	$-M-2/7$	
2	x_2	10/3	0	1	1/3	0	2/3	-1/3	
5	x_1	25/3	1	0	7/3	0	-1/3	2/3	
-1	x_4	11	0	0	1	1	-1	0	
$-z$		-112/3	0	0	-25/3	0	$-M-2/3$	$-M+8/3$	

- 得到最优解：$(25/3，10/3，0，11)^T$
- 最优目标值：max=112/3

单人工变量技巧

- 前述方法引入多个人工变量，能否只引入一个变量而达到目标？

考虑LP

$$\begin{aligned} \min\quad & cx \\ s.t.\quad & Ax = b, \quad i = 1,2,\ldots m \\ & x \ge 0, \qquad\qquad (3.2.14) \end{aligned}$$

设$A=[B,N]$, $x=(x_B,x_N)$, x_B为基变量, x_N为非基变量

$$Ax = b \Rightarrow \ Bx_B + Nx_N = b$$

$$\Rightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b = \bar{b} \qquad (3.2.15)$$

若$\bar{b} \ge 0 \Rightarrow \mathrm{x}^{\mathrm{T}} = (x_N, x_B) = (\bar{b}\ ,0)$为BFS。从而可以用单纯形方法求得最优解。否则，我们考虑引进一个人工变量来求出初始可行解。

大连理工大学 Dalian University of Technology

■ 单人工变量技巧

引入单个人工变量$\boldsymbol{x}_\alpha$：由(3.2.15)得，

$$\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{e} = \bar{\boldsymbol{b}}, \quad (3.2.16)$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0,\ \boldsymbol{x}_\alpha \geq 0$$

其中$\boldsymbol{e} = (1,1,\ldots,1)^T$ 为分量全为一的m维列向量.

下面考虑如何求得(3.2.16)的一个BFS. 设$\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$.

令 $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i\} < 0.$

将x_α引入基:以第r行为主行,经主元消去,则x_α将进基。

此时右端向量变为:$\begin{cases} \bar{b}'_r = -\bar{b}_r \\ \bar{b}'_i = \bar{b}_i - \bar{b}_r,\quad i \neq r. \end{cases}$

于是得到（3.2.16）的一个BFS，x_α为基变量. 从而可以用两阶段或大M方法求得最优解。

■ 单人工变量技巧

例子：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - x_2 \geq 1, \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

引进松驰变量x_3, x_4,化为标准型

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 4 \end{aligned}$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 单人工变量技巧

引进松驰变量x_3, x_4,化为标准型

$$\min \quad x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ & -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ & x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,4 \end{aligned}$$

等式两端乘以(-1), 引进人工变量x_5, 化为

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -2 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,4 \end{cases} \Rightarrow (3.2.17) \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = -2 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

■ 单人工变量技巧

- 利用表格形式求解一个(3. 2. 17)的BFS：

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_3 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
x_4 & 1 & -2 & 0 & 1 & [-1] & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_3 & -2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
x_5 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

■ 单人工变量技巧

- 于是得到(3. 2. 17)的一个BFS，下面再用两阶段(或大M)法求解之.

$$\min \quad x_5$$

$$-2x_1+3x_2+x_3-x_4=1,$$

$$-x_1+2x_2-x_4+x_5=2$$

$$x_i \geq 0, i=1,2,\ldots,5$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
[x_3] & -2 & [3] & 1 & -1 & 0 & 1 \\
x_5 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
\hline
\end{array}$$

单人工变量技巧

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	-2	$[3]$	1	-1	0	1
x_5	-1	2	0	-1	1	2
	-1	2	0	-1	0	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	$-2/3$	1	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$
x_5	$1/3$	0	$-2/3$	$-1/3$	1	$4/3$
	$1/3$	0	$-2/3$	$-1/3$	0	$4/3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	-1	-1	3
x_1	1	0	-2	-1	4
	0	0	0	0	0

■ 单人工变量技巧

- 于是得到进行第二阶段时的初始表。

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
x_2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\
x_1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 4 \\
\hline
 & 0 & 0 & -4 & -3 & 10 \\
\hline
\end{array}
$$

- 由上知道这是最优单纯形表。

- 第五次作业

  - 118页习题 1、2、3、4

■ 小结

- 线性规划单纯形表
- 线性规划两步法
- 线性规划大M法
- 退化情形