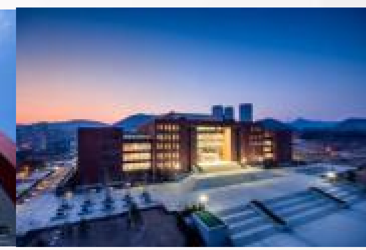
最优化理论
Optimality Theory




目 录 (CONTENT)

大连理工大学
Dalian University Of Technology

03 PART THREE

单纯形方法

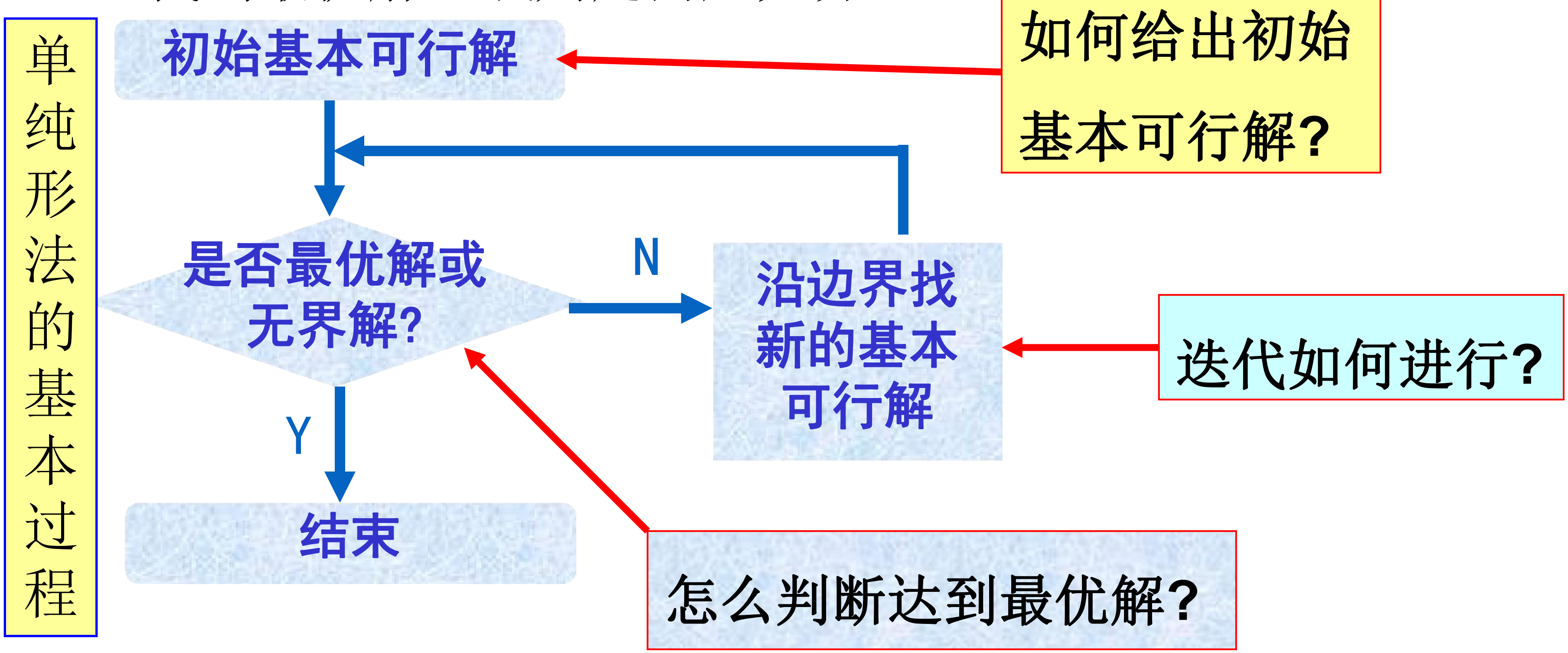
Simplex Method

■ 主要内容

- ➢ 单纯形方法原理
- ➢ 两阶段法和大M方法
- ➢ 退化情形
- ➢ 修正单纯形方法

■ 单纯形法基本思路

有选择地取(而不是枚举所有的)基本可行解，即是从可行域的一个顶点出发，沿着可行域的边界移到另一个相邻的顶点，要求新顶点的目标函数值不比原目标函数值差，如此迭代，直至找到最优解，或判定问题无界。



表格法

	f	x_B	x_N	右端
x_B	0	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
f	1	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$

$$\min \ f$$

$$s.t. \quad x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b,$$

$$f + 0 \cdot x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0$$

■ 表格法

$$记 B^{-1}N = B^{-1}(A_{N(1)}, A_{N(2)}, \dots, A_{N(n\text{-}m)})$$

$$= (B^{-1}A_{N(1)}, B^{-1}A_{N(2)}, \dots, B^{-1}A_{N(n\text{-}m)})$$

$$= (y_{N(1)}, y_{N(2)}, \dots, y_{N(n\text{-}m)})$$

$$B^{-1}b = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_3),$$

$$(c_B B^{-1}N - c_N)_j = (c_B B^{-1}A_j - c_j) = -\bar{c}_j = (z_j - c_j)$$

■ 表格法

单纯形表

右端向量

进基变量

离基变量

	x_1	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	RHS
	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$-\bar{c}_{m+1}$	$\cdots$	$-\bar{c}_k$	$\cdots$	$-\bar{c}_n$	z_0
x_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rk}^*$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

旋转元

■ 两阶段法

$$\min \ c^T x \quad s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

关系?

$$\min g = \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \quad s.t. \begin{cases} Ax + x_\alpha = b \\ x \geq 0, x_\alpha \geq 0 \end{cases}$$

第一阶段：不考虑原LP问题是否有基可行解，添加人工变量，构造仅含人工变量的目标函数，得辅助规划(3.2.4)

单纯型法求解上述模型，若有目标函数=0，说明原问题存在初始基本可行解，转入第二阶段。否则，原问题无可行解，计算停止。

第二阶段：将第一阶段计算得到的最终表，除去人工变量，从该初始基本可行解开始，用单纯形法求原问题的最优解或判定原问题无界。

■ 大M法

现在关键是如何选取目标函数，因要包含原问题，所以必须包含原目标。联系到两阶段法，我们要强迫人工变量取值为0，于是加上一个惩罚因子，因为是极小化，所以希望这个惩罚因子越大越好！！

在目标函数中增加$M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$项，得如下规划

$$\min z = c^{T}x + M\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i$$

$$s.t.\begin{cases} Ax + x_{\alpha} = b \\ x \geq 0, x_{\alpha} \geq 0 \end{cases}$$

■ 单人工变量技巧

引入单个人工变量$\boldsymbol{x}_\alpha$：由(3.2.15)得，

$$\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{e} = \bar{\boldsymbol{b}}, \quad (3.2.16)$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0,\ \boldsymbol{x}_\alpha \geq 0$$

其中$\boldsymbol{e} = (1,1,\dots,1)^{T}$ 为分量全为一的m维列向量.

下面考虑如何求得(3.2.16)的一个BFS. 设$\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m)$.

令 $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i\} < 0.$

将x_α引入基：以第r行为主行，经主元消去，则x_α将进基。

此时右端向量变为：$\begin{cases} \bar{b}'_r = -\bar{b}_r \\ \bar{b}'_i = \bar{b}_i - \bar{b}_r, \quad i \neq r. \end{cases}$

于是得到（3.2.16）的一个BFS，x_α为基变量. 从而可以用两阶段或大M方法求得最优解。

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 单人工变量技巧

例子：

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 2x_2 \\
s.t.\ & x_1 - x_2 \geq 1, \\
& -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

引进松驰变量x_3, x_4,化为标准型

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 2x_2 \\
s.t.\ & x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\
& -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

■ 单人工变量技巧

引进松驰变量x_3, x_4,化为标准型

$$\min \quad x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 - x_2 - x_3 = 1,$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 4$$

等式两端乘以(−1),引进人工变量x_5,化为

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 4 \end{cases} \Rightarrow (3.2.17) \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = -2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$

■ 单人工变量技巧

- 利用表格形式求解一个(3.2.17)的BFS：

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_3 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
x_4 & 1 & -2 & 0 & 1 & [-1] & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_3 & -2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
x_5 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

单人工变量技巧

- 于是得到(3.2.17)的一个BFS，下面再用两阶段(或大M)法求解之.

$$\min \quad x_5$$

$$-2x_1+3x_2+x_3-x_4=1,$$

$$-x_1+2x_2-x_4+x_5=2$$

$$x_i \ge 0, i=1,2,\dots,5$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
[x_3] & -2 & [3] & 1 & -1 & 0 & 1 \\
x_5 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
\hline
\end{array}$$

■ 单人工变量技巧

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	-2	$[3]$	1	-1	0	1
x_5	-1	2	0	-1	1	2
	-1	2	0	-1	0	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	$-2/3$	1	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$
x_5	$1/3$	0	$-2/3$	$-1/3$	1	$4/3$
	$1/3$	0	$-2/3$	$-1/3$	0	$4/3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	-1	-1	3
x_1	1	0	-2	-1	4
	0	0	0	0	0

■ 单人工变量技巧

- 于是得到进行第二阶段时的初始表。

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	-1	-1	3
x_1	1	0	-2	-1	4
	0	0	-4	-3	10

- 由上知道这是最优单纯形表。

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 退化情形

- 单纯形法收敛定理要求BFS非退化，这个限制可以去掉吗？试看下例。

  例 (3.3.1)：用单纯形法求解下面的LP

$$\min \quad -\tfrac{3}{4}x_4+20x_5-\tfrac{1}{2}x_6+6x_7$$

$$x_1+\tfrac{1}{4}x_4-8x_5-x_6+9x_7=0$$

$$x_2+\tfrac{1}{2}x_4-12x_5-\tfrac{1}{2}x_6+3x_7=0$$

$$x_3+x_6=1$$

$$x_i\ge 0, i=1,2,\dots,7$$

- 注意到该LP有一个明显的BFS

$$x=(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

■ 退化情形

其单纯形法迭代过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0

■ 退化情形

其单纯形法迭代过程如下：

x_4	4	0	0	1	–32	–4	36	0
x_2	–2	1	0	0	4	$\frac{3}{2}$	–15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	–3	0	0	0	4	3.5	–33	0

■ 退化情形

其单纯形法迭代过程如下：

x_4	4	8	0	1	0	8	-84	0
x_5	$-1/2$	$1/4$	0	0	1	$3/8$	$-15/4$	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	-1	-1	0	0	0	2	-18	0

■ 退化情形

其单纯形法迭代过程如下：

x_6	$-3/2$	1	0	$1/8$	0	1	$-21/2$	0
x_5	$1/16$	$-1/8$	0	$-3/64$	1	0	$3/16$	0
x_3	$3/2$	-1	1	$-1/8$	0	0	$21/2$	1
	2	-3	0	$1/4$	0	0	3	0

■ 退化情形

其单纯形法迭代过程如下：

x_6	2	–6	0	$-\frac{5}{2}$	56	1	0	0
x_7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$	0	1	0
x_3	–2	6	1	$\frac{5}{2}$	–56	0	0	1
	1	–1	0	$\frac{1}{2}$	–16	0	0	0

■ 退化情形

其单纯形法迭代过程如下：

x_1	1	–3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0	0
x_7	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	–4	$-\frac{1}{6}$	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	2	0	$\frac{7}{4}$	–44	$-\frac{1}{2}$	0	0

■ 退化情形

其单纯形法迭代过程如下：

x_1	1	–3	0	$-\frac{5}{4}$	28	$\frac{1}{2}$	0	0
x_7	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	–4	$-\frac{1}{6}$	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	2	0	$\frac{7}{4}$	–44	$-\frac{1}{2}$	0	0

■ 退化情形

其单纯形法迭代过程如下：

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 & 0 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\
x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -20 & \frac{1}{2} & -6 & 0
\end{array}
$$

■ 退化情形

初始表如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0

第6次迭代如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0

■ 退化情形

- 前例表明算法会无限循环下去，能否找到一种办法避免出现这种情况？

(a) 摄动法

考虑 $\min \quad cx$

$$s.t. \quad Ax = b, \quad i = 1,2,\ldots m$$

$$x \geq 0, \qquad (3.3.1)$$

设$A=[B,N]$, $x=(x_B,x_N)$, x_B为基变量, x_N为非基变量

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b = \bar{b} \qquad (3.2.15)$$

若$x^T = (x_N, x_B) = (\bar{b}\ ,0) \geq 0$为退化$BFS$。是否可以对$b$做一个摄动使得对任意$BFS$ $x^T = (\bar{b}\ ,0) > 0$?

■ 退化情形

- 下面讨论这种办法的可行性。

对右端向量b作如下摄动。令

$$b(\varepsilon)=b+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon^{j}p_{j}, \qquad (3.3.2)$$

其中$\varepsilon>0$充分小，ε^{j}表示ε的j次方，p_{j}是A的第j列。

于是得(3.3.1) 的摄动问题：

$$\begin{aligned}
&\min \quad cx\\
&s.t. \qquad Ax=b(\varepsilon), \qquad i=1,2,\ldots m\\
&\qquad\qquad x\geq 0, \qquad\qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

■ 退化情形

下面我们将证明当适当对ε取值时，LP(3.3.3)非退化，且可以通过求解LP(3.3.3)来确定原LP(3.3.1)的最优解或得出其他结论。

定理3.3.1 对于LP(3.3.1)，存在实数$\varepsilon_1>0$，使得$0<\varepsilon<\varepsilon_1$时，摄动问题(3.3.3)非退化。

定理3.3.2 设对于充分小$\varepsilon>0$，$\hat{x}(\varepsilon)$是摄动问题(3.3.3)的BFS，则$\hat{x}(0)$是LP(3.3.1)的BFS。

推论 设对于充分小$\varepsilon>0$，$\hat{x}(\varepsilon)$是摄动问题(3.3.3)的最优解，则$\hat{x}(0)$是LP(3.3.1)的最优解。

定理3.3.3 若摄动问题(3.3.3)无可行解,则LP(3.3.1)无可行解。

定理3.3.4 设对于充分小$\varepsilon>0$，摄动问题(3.3.3)无界,则LP问题(3.3.1)也无界。

■ 退化情形

- 前面分析表明摄动问题当ε>0充分小时非退化，因此可以避免循环，并且通过求解摄动问题一定能够给出线性规划(3.3.1)的解答。
- 下一个问题是如何求解摄动问题？此时需要处理两个问题：(1) 初始可行解；(2) 迭代过程中如何处理$b(\boldsymbol{\varepsilon})$.

注意到$B^{-1}b \geq 0$并不能保证$B^{-1}b(\varepsilon) \geq 0$,因此不是直接由LP(3.3.1)的BFS都可得到LP(3.3.3)的BFS,如下例：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ \quad x_i \geq 0 \end{cases} \qquad (3.3.7) \quad \Rightarrow \quad \text{BFS} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

■ 退化情形

- 对应的摄动问题约束为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \\ -x_1 + x_3 = -\varepsilon + \varepsilon^3 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \qquad (3.3.8)$$

$\Rightarrow$ BFS $x^{(0)}$对应(3.3.8)的基本解$x^{(0)}(\varepsilon)^T = \left(0, 1 + \varepsilon + \varepsilon^2, \underbrace{-\varepsilon + \varepsilon^3}_{<0}\right)$

不可行($0 < \varepsilon < 1$时),

幸运的是我们可以通过将变量下标进行适当调整，使得上述情况不出现。改变标号，使得(3.3.8)为如下等价约束:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \quad (3.3.9) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \\ x_2 - x_3 = \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \\ x_i \ge 0 \end{cases} \quad (3.3.10)$$

■ 退化情形

(3.3.9)的BFS $x^{(0)}=(1,0,0)$对应(3.3.1)的BFS

$$x^{(0)}(\varepsilon)^{T}=\left(1+\varepsilon+\varepsilon^{2},\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3},0\right)(\varepsilon\text{充分小}),$$

- 一般地，若已知LP(3.3.1)的一个BFS，则进行列调换，把基列排在非基列的左边，并相应地改变变量的下标，使其从1开始按递增顺序排列，这样$x_1,x_2,\ldots,x_m$是基变量，然后再建立摄动问题(3.3.3). 这时，若(3.3.1)的现行BFS是

$$\begin{cases} x_i=\bar{b}_i, & i=1,2,\ldots,m, \\ x_i=0, & i=m+1,\ldots,n. \end{cases} \quad (3.3.11) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_i(\varepsilon)=\bar{b}_i+\varepsilon^{i}+\sum\limits_{j=m+1}^{n} y_{ij}\varepsilon^{j}, & i=1,2,\ldots,m, \\ x_i(\varepsilon)=0, & i=m+1,\ldots,n. \end{cases} \quad (3.3.12)$$

是摄动问题的一个 BFS 。

■ 退化情形

- 于是可以用单纯形法求解下去。但右端向量含有参数ε，这对计算有影响吗？实际上我们可以不必让ε取具体数字。注意到：

$$\frac{\bar{b}_r(\varepsilon)}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i(\varepsilon)}{y_{ik}} \middle| y_{ik} > 0\right\} \quad (3.3.13),$$

$$\frac{\bar{b}_i(\varepsilon)}{y_{ik}} = \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{ij}}{y_{ik}} \varepsilon^j, \quad (3.3.14)$$

ε是充分小的正数, 因此多项式(3.3.14)的大小主要决定于低次项,于是为确定最小比值,只需从ε的零次项开始,逐项比较幂的系数. 首先比较零次项,即$\bar{b}_i / y_{ik}\ (y_{ik} > 0)$零次项小的其比值比小. 零次项相同时再比较一次项, 依此下去. 即按多项式系数的字典序比较大小,选择最小者.

■ 退化情形

- 概言之，以如下步骤确定离基变量：

(a)令

$$I_0=\left\{r\left|\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}=\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\middle|y_{ik}>0\right\}\right.\right\}$$

若I_0中只有一个元素r，则x_{B_r}为离基变量

(b) 置j=1.

(c)令

$$I_j=\left\{r\left|\frac{y_{rj}}{y_{rk}}=\min_{i\in I_{j-1}}\left\{\frac{y_{ij}}{y_{ik}}\right\}\right.\right\}$$

若I_j中只有一个元素r，则x_{B_r}为离基变量.

(d) 置j:=j+1,转(c).

■ 退化情形

例：用摄动法解例(3.3.1),初始单纯形表如下

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0

(0,4)

(0,2)

x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2	$\frac{-3}{4}$	$\frac{15}{2}$	0
x_4	0	2	0	1	-24	-1	6	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	-2	$\frac{5}{4}$	$\frac{-21}{2}$	0

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 退化情形

x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{5}{4}$

•判别数满足，这是最优单纯形表。

•最优解(3/4,0,0,1,0,1,0),最优值-5/4

■ 退化情形

Bland规则(退化问题的处理)：

1> 设$h=\min\{i \mid \xi_i>0, 1\le i\le n\}$, 其中$\xi_i$为检验数，确定$x_h$入基。

即在单纯形表中选最左边的正检验数对应的非基变量入基。

2> 如果有几个比值$\dfrac{b_j}{a_{jh}}(a_{jh}>0)$达到最小值$\theta$，则令

$$k=\min\{j \mid \frac{b_j}{a_{jh}}=\theta, 1\le j\le m, a_{jh}>0\}$$，并确定x_k出基。

即在比值达到最小的行中，选最上面的那行所对应的基变量$\boldsymbol{x}_k$出基。

注意 解LP问题时常遇到基本可行解退化的情形，但在迭代过程中极少出现循环情形。

■ 退化情形

- 应该说明的是，

1.对于退化问题不用摄动法也不一定出现循环。

2.事实上，退化问题是常见的，但迭代中发生循环现象很少。

3.实际问题中，几乎不发生。

4.关于退化和循环的研究，主要是理论意义。

■ 修正单纯形方法

在前面单纯形方法的讨论中知道:每次迭代都要修改单纯形表中$(m+1)\cdot(n+1)$个元素，我们能否避免这个计算？换言之，只计算一个较小的矩阵，如$(m+1)(m+1)$阶矩阵，并且当我们需要计算检验数$\bar{c}_j=c_j-c_B B^{-1}A_j$和列$B^{-1}A_j=y_j$时能够立即计算出来？？

下面我们将介绍一种方法:**修正单纯形方法**.

基本思想: **给定初始基本可行解以后通过修改旧基的逆B^{-1}来获得新基的逆$\hat{B}^{-1}$，进而完成单纯形法的其他运算。**

在整个过程中始终保存现行基的逆。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z’	2	3	1	0	0	0	0	
x_4	1	[3]	1	1	0	0	15	15/3
x_5	2	3	-1	0	1	0	18	18/3
x_6	1	-1	1	0	0	1	3	-

初始单纯型表

$$(B, I) \rightarrow (I, B^{-1})$$

$$B = (A_2 \quad A_1 \quad A_3) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_1 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

最优单纯型表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z’	0	0	0	-5/6	-1/3	-1/2	-20
x_2	0	1	0	1/4	0	-1/4	3
x_1	1	0	0	-1/6	1/3	1/2	5
x_3	0	0	1	5/12	-1/3	1/4	1

最优解:$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5x_6)=(5,3,1,0,0,0)$, max z=20

■ 修正单纯形方法

怎样由修改B^{-1}来获得$\hat{B}^{-1}$呢?为此考察它们之间的关系:

设在某次迭代时,主元消去前,可行基为:

$$B=(p_{B_1},p_{B_2},\ldots,\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{r}}},\ldots.,p_{B_m}) \qquad (3.4.1)$$

主元消去后，新的可行基为

$$\hat{B}=(p_{B_1},p_{B_2},\ldots,\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}},\ldots.,p_{B_m}) \qquad (3.4.2)$$

回忆单纯形方法，不妨设初始单纯形表中系数矩阵含有单位阵，即系数矩阵为

$$(p_{B_1},p_{B_2},\ldots,\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{r}}},\ldots.,p_{B_m},\ldots,p_k,\ldots.,\boldsymbol{I}), \qquad (3.4.3)$$

其中I是单位阵,它作为初始基. 当B作为基矩阵时,(3.4.3) 式就转化为：$(e_1,e_2,\ldots,e_r,\ldots.,e_m,\ldots,y_k,\ldots.,B^{-1}),$ $\qquad$ (3.4.4)

■ 修正单纯形方法

当取$\hat{B}$作为基矩阵时，应以y_{rk}为主元，通过主元消去运算把B化为单位矩阵，即把(3.4.4)化为：

$$(e_1, e_2, \ldots, y_{B_r}, \ldots., e_m, \ldots, e_r, \ldots., \hat{B}^{-1}), \qquad (3.4.5)$$

由(3.4.4)和(3.4.5)可知, B^{-1}经以y_{rk}为主元的主元消去, 得到$\hat{B}^{-1}$.

因此, B^{-1}与$\hat{B}^{-1}$有如下关系:

$$\hat{b}_{ij} = b_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} b_{rj}, \ i \neq r, \qquad (3.4.6)$$

$$\hat{b}_{rj} = \frac{b_{rj}}{y_{rk}}, \qquad (3.4.7)$$

其中$b_{ij}(\hat{b}_{ij})$是$B^{-1}(\hat{B}^{-1})$的第i行第j列元素.

■ 退化情形

这样，有了初始表 (即问题的系数矩阵，费用向量和右端向量子集组成)，当前表*和基B，则修正单纯形方法就可进行下去了

■ 修正单纯形方法

1) 给定初始可行基的逆B^{-1},计算单纯形乘子$w=c_B B^{-1}$,

右端向量$\bar{b}=B^{-1}b$。组成下表

w	$c_B\bar{b}$
B^{-1}	$\bar{b}$

2) 对每个非基变量计算判别数$z_j-c_j=w\cdot p_j-c_j$;

令$z_k-c_k=\max\{z_j-c_j\}$.若$z_k-c_k\le 0$,则停止计算,

当前BFS即最优解,否则转步(3)。

3) 计算主列y_k=$B^{-1}p_k$.若$y_k\le 0$,停止计算,问题无界. 否则转4

■ 修正单纯形方法

4) 把主列置于逆矩阵表的右边，组成下列表

	w	$c_B\bar{b}$
x_B	B^{-1}	$\bar{b}$

x_k
$z_k - c_k$
y_k

按最小比值确定主行,令

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \middle| y_{rk} > 0\right\}$$

r行为主行，以y_{rk}为主元进行主元消去，然后去掉原来的主列，返回步骤(2).

修正单纯形方法

例3.4.1 用修正单纯形法解下列LP

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 \\
\text{s.t.}\ & -3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 5, \\
& 2x_1 - x_3 + x_4 - x_5 \le 6, \\
& x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \le 3, \\
& x_j \ge 0,\ \mathrm{j} = 1, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

■ 修正单纯形方法

例3.4.1 用修正单纯形法解下列LP

标准形:

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 \\
s.t.\quad & -3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 5, \\
& 2x_1 - x_3 + x_4 - x_5 + x_7 = 6, \\
& x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + x_8 = 3, \\
& x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,8
\end{aligned}
$$

■ 修正单纯形方法

约束方程的系数矩阵

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7,p_8)$$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

取初始可行基$B=(p_6,p_7,p_8)=I_3, \bar{b}=(5,6,3)^T$.

按定义计算单纯形乘子w=(0,0,0),目标函数值f=0,构造初表:

0	0	0	0
1	0	0	5
0	1	0	6
0	0	1	3

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 修正单纯形方法

第1次迭代：

$$w=(0,0,0)$$

$$z_1-c_1=wp_1-c_1=(0,0,0)(-3,2,0)^T-2=-2;$$

$$z_2-c_2=wp_2-c_2=(0,0,0)(1,0,1)^T-1=-1;$$

$$z_3-c_3=wp_3-c_3=1;\quad z_4-c_4=wp_4-c_4=3$$

$$z_5-c_5=wp_5-c_5=-1$$

$z_4-c_4=3$为最大$\Rightarrow x_4$为进基变量，计算主列

$y_4=B^{-1}p_4=(-1,1,-1)^T$有唯一正分量$\Rightarrow$ 正分量对应行离基

0	0	0	0
1	0	0	5
0	1	0	6
0	0	1	3

x_4
3
-1
1
-1

■ 修正单纯形方法

以主列的元素y_{24}=1为主元，做主元消去得：

	0	−3	0	−18
x_6	1	1	0	11
x_4	0	1	0	6
x_8	0	1	1	9

第二次迭代

由上表知单纯形乘子w=(0,−3,0),下计算判别数

$z_1-c_1=(0,-3,0)(-3,2,0)^T-2=-8; z_2-c_2=(0,-3,0)(1,0,1)^T-1=-1;$

$z_3-c_3=(0,-3,0)(1,-1,2)^T+1=4; z_5-c_5=(0,-3,0)(2,-1,1)^T-1=2;$

$z_7-c_7=(0,-3,0)(0,1,0)^T-0=-3$

$\Rightarrow x_3$进基

■ 修正单纯形方法

计算主列

$$y_3 = B^{-1}p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由于y_3有正分量，故可选择离基变量，构造下表

					x_3
	0	−3	0	−18	4
x_6	1	1	0	11	0
x_4	0	1	0	6	−1
x_8	0	1	1	9	1

■ 修正单纯形方法

以$y_{33}=1$为主元,做主元消去运算:

第3次迭代:

$w=(0,-7,-4)$

$z_1-c_1=-16;$

$z_2-c_2=-5;$

$z_5-c_5=2;$

$z_7-c_7=-7;$

$z_8-c_8=-4;$

$\Rightarrow x_5$进基

	0	−7	−4	−54
x_6	1	1	0	11
x_4	0	2	1	15
x_3	0	1	1	9

计算主列

$$y_5=B^{-1}p_5=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

■ 修正单纯形方法

由于y_5有正分量，故可选择离基变量，构造下表

	0	-7	-4	-54
x_6	1	1	0	11
x_4	0	2	1	15
x_3	0	1	1	9

x_5
2
1
-1
0

以y_{15}做主元消去

	-2	-9	-4	-76
x_5	1	1	0	11
x_4	1	3	1	26
x_3	0	1	1	9

■ 修正单纯形方法

第4次迭代

$$w=(-2,-9,-4)$$

$$z_1-c_1=-14; z_2-c_2=-7;$$

$$z_6-c_6=-2; z_7-c_7=-9;$$

$$z_8-c_8=-4; \Rightarrow \text{达到最优}$$

最优解： $(x_1,\ldots,x_5)=(0,0,9,26,11)$

最优值 $f_{\min}=-76$

■ 逆的乘积形式

初看起来，用修改的(m+1)×(m+1)矩阵代替(m+1)×(n+1)的表，似乎明显的节省了计算量。然而这一方法需要计算原问题表中的yj和w•pj，若对每一个非基序列都要进行这样的计算，则需要m(n-m)次乘法。这个数量并不明显小于原单纯形算法中计算量。然而这个算法重要性在于其精巧和在其他一些问题上的很好应用。下面我们将给出一种改进形式的方法，其基的逆矩阵以乘积形式存储，从而节省了存储空间。

■ 逆的乘积形式

设有可行基矩阵

$$B = (p_{B_1}, p_{B_2}, \ldots, \boldsymbol{p}_{B_r}, \ldots, p_{B_m}) \qquad (3.4.1)$$

其逆B^{-1}已知. 设在迭代中用非基列$\boldsymbol{p}_k$替换基列$\boldsymbol{p}_{B_r}$，得新基

$$\begin{aligned}\hat{B} &= (p_{B_1}, p_{B_2}, \ldots, p_k, \ldots, p_{B_m}) \\ &= (Be_1, \ldots, By_k, \ldots, Be_m) \\ &= B(e_1, \ldots, y_k, \ldots, e_m) = BT \qquad (3.4.8)\end{aligned}$$

由(3.4.8)式得到

$$\hat{B}^{-1} = T^{-1} B^{-1} = EB^{-1} \qquad (3.4.9)$$

■ 逆的乘积形式

由于

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & y_{1k} & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & y_{2k} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & y_{rk} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & y_{mk} & \dots & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & -{y_{1k}}/{y_{rk}} & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & -{y_{2k}}/{y_{rk}} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & {1}/{y_{rk}} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -{y_{mk}}/{y_{rk}} & \dots & 1\end{pmatrix}$$

■ 逆的乘积形式

这样，新基的逆$\hat{B}^{-1}$就可表成初等矩阵E 与旧基的逆B^{-1} 的乘积。

若在第一次迭代中基的逆$B^{-1}{}_1 = I$，则第二次迭代中，基的逆

$$B_2^{-1} = E_1 \quad B_1^{-1} = E_1$$

在第三次迭代中，基的逆

$$B_3^{-1} = E_2 B_2^{-1} = E_2 E_1$$

依次下去，一般的，第t次迭代，有

$$B_t^{-1} = E_{t-1} \quad B_{t-1}^{-1} = E_{t-1} E_{t-2} \dots E_2 E_1 \qquad (3.4.12)$$

■ 逆的乘积形式

下面讨论如何利用初等阵来计算单纯形方法中所需数据。

(1) 用初等阵E右乘一个行向量

$$cE=(c_1,c_2,\ldots,c_m)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & g_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & g_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & g_m & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$=(c_1,c_2,\ldots,c_{r-1},\sum_{i=1}^{m} c_i g_i, c_{r+1},\ldots,c_m)$$

其 中 $c=(c_1,c_2,\ldots,c_m)$,

$$g_i=-y_{ik}/y_{rk}, \quad i\neq r, \quad g_r=1/y_{rk}$$

■ 逆的乘积形式

(2) 用E左乘一个列向量

$$Ep=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & g_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & g_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & g_m & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ 0 \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}+a_r\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{r-1} \\ g_r \\ g_{r+1} \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

$$=\hat{a}+a_r g \qquad (3.4.14)$$

■ 逆的乘积形式

(3)计算有关递推公式

计算单纯形乘子:

$$w = c_B B_t^{-1} = (((c_B E_{t\text{-}1})E_{t\text{-}2}\ldots)E_1) \qquad (3.4.15)$$

计算主列

$$y_k = B_t^{-1} p_k = (E_{t\text{-}1}\ldots(E_2(E_1 p_k))) \qquad (3.4.16)$$

计算右端列

$$\overline{b} = B_t^{-1} b = E_{t\text{-}1}(B_t^{-1} b) \qquad (3.4.17)$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 逆的乘积形式

例3.4.2，用改进修正单纯形法解LP

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x_1 - x_2 - 2x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 8, \\
& -x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \\
& -x_2 + 2x_3 \le 4, \\
& x_j \ge 0,\ \mathrm{j} = 1,2,3
\end{aligned}
$$

标准形：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x_1 - x_2 - 2x_3 \\
s.t.\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\
& -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\
& -x_2 + 2x_3 + x_6 = 4, \\
& x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,6
\end{aligned}
$$

■ 逆的乘积形式

约束方程的系数矩阵

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

取初始可行基 $B_1=(p_4,p_5,p_6)=I_3=\mathrm{B}_1^{-1}$,

第一次迭代:

$$\overline{b}=B_1^{-1}b=(5,6,3)^T,$$

$$x_B^T=(x_4,x_5,x_6)=(8,2,4), x_B^T=(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0).$$

在当前BFS处目标函数值$f=0$。

大连理工大学 Dalian University of Technology

■ 逆的乘积形式

$$w=c_B B_1^{-1}=(0,0,0)$$

$$z_1-c_1=wp_1-c_1=-1; z_2-c_2=wp_2-c_2=1;$$

$$z_3-c_3=wp_3-c_3=2; z_3-c_3=\max\{z_i-c_i\}$$

$z_3-c_3=3$为最大$\Rightarrow x_3$为进基变量，计算主列

$$y_3=B_1^{-1}p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow x_6\text{离基}(\min\left\{\frac{8}{1},\frac{4}{2}\right\}=\frac{\bar{b}_3}{y_{33}})$$

初等阵E1的非单位向量列出现在r=3的位置，

即其第3列，由主列y_3得此列为 $g=\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$

■ 逆的乘积形式

在计算机中存储$\begin{bmatrix} g \\ 3 \end{bmatrix}$,用它描述初等阵$E_1$

第二次迭代

$$\bar{b}=E_1(B_1^{-1}b)=\begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix},$$

$$x_B=\begin{pmatrix}x_4\\x_5\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix},\ x_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f_2=f_1-\bar{b}_3(z_3-c_3)=0-2\times 2=-4$$

$$w=c_B E_1$$
$$=(0,0,-2)E_1=(0,0,-1)$$
$$z_1-c_1=-1;\ z_2-c_2=2;$$
$$z_6-c_6=-1;$$
$\Rightarrow x_2$进基

■ 逆的乘积形式

计算主列

$$y_2 = E_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\bar{b}_1}{y_{12}} = \min\left\{\frac{6}{3/2}, \frac{4}{1/2}\right\} \Rightarrow x_4\text{离基。}$$

E_2的非单位列g出现在$r=1$的位置，由主列y_2得：

$$g = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \text{存储}\begin{bmatrix} g \\ 1 \end{bmatrix}$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 逆的乘积形式

第3次迭代

$$\bar{b}=E_2(B_2^{-1}b)=E_2\begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix},$$

$$x_B=\begin{pmatrix}x_2\\x_5\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix},\ x_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_4\\x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f_3=f_2-\bar{b}_1(z_2-c_2)=4-2\times4=-12.$$

$$w=c_BE_2E_1$$

$$=(-1,0,-2)E_2E_1=(-\tfrac{3}{4},0,-\tfrac{1}{3})$$

$$z_1-c_1=-\tfrac{7}{3};\ z_2-c_2=-4/3;$$

$$z_6-c_6=-1/3;$$

$\Rightarrow$ 最优

■ 第五次作业

- 118页习题 1、2、3、4

小结

- 线性规划单纯形表
- 退化情形
- 修正单纯形法
- 逆的乘积形式