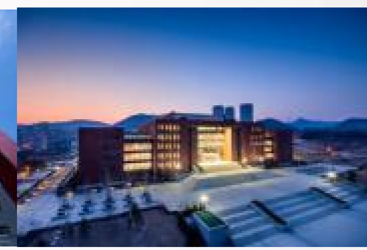
最优化理论
Optimality Theory




目 录 (CONTENT)

04

PART Four

对偶理论与灵敏度分析

Duality Theory and Sensitivity Analysis

主要内容

■ 对偶问题

维生素	奶中含量	蛋中含量	每日需求
Vc(mg)	2	4	40
Vb(mg)	3	2	50
单价(US$)	3	2.5	

重新考虑食谱问题：以出售奶和蛋给需要维生素的食品供应商的利益出发，他的问题是确定出售维生素Vc的价格x和维生素Vb的价格 y。他不能将价格订得高于奶和蛋的市场流行价，否则将失去他的顾客；他希望商店的总收入为最大。

大连理工大学 Dalian University of Technology

■ 对偶问题

$$
\begin{aligned}
\text{Max}\ & 40x + 50y \\
\text{s.t.}\ & 2x + 3y \le 3 \\
& 4x + 2y \le 2.5 \\
& x, y \ge 0.
\end{aligned}
$$

极大化目标函数

可行区域（单纯形）

可行解

$$
\begin{aligned}
\text{Min}\ & 3x + 2.5y \\
\text{s.t.}\ & 2x + 4y \ge 40 \\
& 3x + 2y \ge 50 \\
& x, y \ge 0.
\end{aligned}
$$

极小化目标函数

可行区域（单纯形）

可行解

■ 对偶问题

对比一下从消费者和供应商各自的利益导出的两个问题，不难发现两个问题可以通过下述简单的变换，而相互转化：

极小化费用 Min	⟷	极大化利润Max
大于等于约束 ≥	⟷	小于等于约束 ≤
食品费用	⟷	价格约束

当你把食谱问题的对偶问题解出以后（**练习**），你会发现一个（重要的）事实：这两个问题的最优值是相等的！

思考题：在数学上，是不是还有一些对偶的问题和概念？

■ 对偶问题

对偶问题的表达式

1.对称形式的对偶

Primal Min cx

$$\text{s.t. } Ax \geq b, \qquad (4.1.1)$$
$$x \geq 0$$

Dual Max wb

$$\text{s.t. } wA \leq c, \qquad (4.1.2)$$
$$w \geq 0$$

大连理工大学
Dalian University Of Technology

■ 对偶问题

对偶问题的表达式

2.非对称形式的对偶

Primal **Min cx**

$$\text{s.t. } Ax=b, \qquad (4.1.3)$$
$$x\geq 0$$

Dual **Max wb**

$$\text{s.t. } wA\leq c, \qquad (4.1.4)$$
$$w\text{无约束}$$

■ 对偶问题

对偶问题的表达式

3.一般形式的对偶

Primal

$$
\begin{aligned}
\min\quad & cx \\
\text{s. t}\quad & A_1x \geqslant b_1 \\
& A_2x = b_2 \\
& A_3x \leqslant b_3 \\
& x \geqslant 0
\end{aligned}
$$

化为等价的标准形式

$$
\begin{aligned}
\min\quad & cx \\
\text{s. t}\quad & A_1x - x_s = b_1 \\
& A_2x = b_2 \\
& A_3x + x_t = b_3 \\
& x,\ x_s,\ x_t \geqslant 0
\end{aligned}
$$

■ 对偶问题

写成矩阵形式

$$\min \quad cx + 0\cdot x_s + 0\cdot x_t$$

$$\text{s.t} \quad \begin{bmatrix} A_1 & -I_{m_1} & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & I_{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_s \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$x,\ x_s,\ x_t \geqslant 0$$

按非对称对偶的定义，得上述LP的对偶问题

$$\max \quad w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3$$

$$\text{s.t} \quad (w_1,\ w_2,\ w_3) \begin{bmatrix} A_1 & -I_{m_1} & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & I_{m_3} \end{bmatrix} \leqslant [c,\ 0,\ 0]$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 对偶问题

于是原LP的对偶

$$
\begin{aligned}
\max \quad & w_1b_1+w_2b_2+w_3b_3 \\
\text{s. t} \quad & w_1A_1+w_2A_2+w_3A_3\leqslant c \\
& w_1\geqslant 0 \\
& w_3\leqslant 0 \\
& w_2 \text{ 无限制}
\end{aligned}
$$

Dual

■ 对偶问题

Primal		Dual	
min	cx	max	$w_1b_1+w_2b_2+w_3b_3$
s. t	$A_1x\geqslant b_1$	s. t	$w_1A_1+w_2A_2+w_3A_3\leqslant c$
	$A_2x=b_2$		$w_1\geqslant 0$
	$A_3x\leqslant b_3$		$w_3\leqslant 0$
	$x\geqslant 0$		w_2 无限制

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 对偶问题

以上分析可知有如下关系

原问题和对偶问题的对偶约束之间的关系：

原问题（P） min		对偶问题（D） max	
变量	≥ 0	行约束	$\leq$
	≤ 0		$\geq$
	无限制		$=$
行约束	$\geq$	变量	≥ 0
	$\leq$		≤ 0
	$=$		无限制

■ 对偶问题

引理1 对偶问题的对偶是原始问题

(The dual of the dual is the primal.)

证 仅就对称的对偶规划证之。原问题是:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{cx} \\
\text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

其对偶规划是:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \mathbf{wb} \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{w}A \leqslant \mathbf{c} \\
& \mathbf{w} \geqslant \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

■ 对偶问题

将它变换成与原规划相同的形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & (-\mathbf{b})^T \mathbf{w}^T \\ \text{s.t.} \quad & (-A)^T \mathbf{w}^T \geq -\mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w}^T \geq 0 \end{aligned}$$

得到它的对偶规划如下(记它的对偶变量为 $\mathbf{x}^T$)

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{x}^T(-\mathbf{c})^T \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^T(-A^T) \leq (-\mathbf{b})^T \\ & \mathbf{x}^T \geq 0 \end{aligned}$$

即得原问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

■ 对偶问题

例4.1.1 设原问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s.t} \quad & x_1 + x_2 \geqslant 5 \\
& x_1 - 2x_2 \geqslant 1 \\
& x_1,\ x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

上述问题的对偶问题就是:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5w_1 + w_2 \\
\text{s.t} \quad & w_1 + w_2 \leqslant 1 \\
& w_1 - 2w_2 \leqslant -1 \\
& w_1,\ w_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

■ 对偶问题

例4.1.2 设原问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 5x_1+4x_2+3x_3 \\
\text{s.t} \quad & x_1+x_2+x_3=4 \\
& 3x_1+2x_2+x_3=5 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0
\end{aligned}
$$

它的对偶问题是:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 4w_1+5w_2 \\
\text{s.t} \quad & w_1+3w_2\leqslant 5 \\
& w_1+2w_2\leqslant 4 \\
& w_1+w_2\leqslant 3
\end{aligned}
$$

■ 对偶问题

例4.1.3 设原问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -x_1+x_2+x_3 \\
\text{s. t} \quad & x_1+x_2+2x_3\leqslant 25 \\
& -x_1+2x_2-x_3\geqslant 2 \\
& x_1-x_2+x_3=3 \\
& x_1,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

在原问题中，$c=(c_1,\ c_2,\ c_3)=(-1,\ 1,\ 1)$

$$
A=(p_1p_2p_3)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

■ 对偶问题

$$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

于是可得对偶问题

$$\begin{aligned}
\min\ & 25w_1+2w_2+3w_3 \\
\text{s.t}\ & w_1-w_2+w_3 \geqslant -1 \\
& w_1+2w_2-w_3 \geqslant 1 \\
& 2w_1-w_2+w_3=1 \\
& w_1 \geqslant 0,\ w_2 \leqslant 0
\end{aligned}$$

■ 对偶定理

注意到,原问题和对偶问题是由同一数据集(A,b,c)所定义，且对偶问题的对偶即是原问题，因此可以选原始-对偶对中任一为原问题，而另一个则自动为对偶。下面讨论两者间的关系。

Primal $\quad \min \; cx$

$$\text{s.t. } Ax \geq b, \qquad (4.1.1)$$
$$x \geq 0$$

Dual $\quad \max \; wb$

$$\text{s.t. } wA \leq c, \qquad (4.1.2)$$
$$w \geq 0$$

■ 对偶定理

注意到,原问题和对偶问题是由同一数据集(A,b,c)所定义,且对偶问题的对偶即是原问题，因此可以选原始-对偶对中任一为原问题，而另一个则自动为对偶。下面讨论两者间的关系。

定理4.1.1 设$x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是(4.1.1)和(4.1.2)的可行解，

则 $cx^{(0)} \geq w^{(0)}b.$

证明:利用对偶定义立明:

由于 $Ax^{(0)} \geq b, w^{(0)} \geq 0 \Rightarrow w^{(0)}Ax^{(0)} \geq w^{(0)}b, \quad (4.1.10)$

又 $c \geq w^{(0)}A, x^{(0)} \geq 0 \Rightarrow cx^{(0)} \geq w^{(0)}Ax^{(0)}, \quad (4.1.11)$

■ 对偶定理

推论1 若 $x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是原问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的可行解，且$cx^{(0)} = w^{(0)}b$,则$x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是原问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的最优解。

推论2 对偶规划(4.1.1)和(4.1.2)有最优解的条件是
它们同时有可行解。

推论3 若原问题(4.1.1)的目标函数值在可行域上无下界,则其对偶问题无可行解;反之,若对偶(4.1.2)的目标函数值在可行域上无上界,则原问题无可行解.

■ 对偶定理

P \ D	有限最优解	无界	不可行
有限最优解	♠	×	×
无界	×	×	♣
不可行	×	♣	♥

定理4.1.2 设(4.1.1)和(4.1.2)中有一个问题存在最优解，则另一个问题也存在最优解，且这两个问题的最优目标函数值相等。

证明：设(4.1.1)存在最优解。引进松弛变量，将（4.1.1）写成等价形式：

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 对偶定理

$$\begin{aligned} &\min \quad cx \\ s.t \quad &Ax - v = b, \qquad (4.1.12) \\ &x \geq 0, v \geq 0 \end{aligned}$$

由于(4.1.12)存在最优解，因此能用单纯形方法求得一个最优基本可行解。 不妨设此最优解为

$$y^{(0)} = (x^{(0)T}, v^{(0)T})^T$$

相应的最优基为B.此时所有判别数满足：

$$w^{(0)} p_j - c_j \leq 0, \forall j \qquad (4.1.13)$$

■ 对偶定理

其中$w^{(0)}=c_B B^{-1}$,c_B是目标函数中基变量(包括松弛变量中的基变量)的系数组成的向量.考察所有原来变量(不含松弛变量)在基B下的判别数,把他们所满足的条件(4.1.13)用矩阵形式同时写出,得$w^{(0)}A-c\le 0$

即

$$w^{(0)}A-c\le 0 \qquad (4.1.14)$$

把所有松弛变量在基B下对应的判别数所满足的条件(4.1.13)用矩阵表示,得

$$w^{(0)}(-I)\le 0$$

即

$$w^{(0)}\ge 0 \qquad (4.1.15)$$

■ 对偶定理

由于非基变量取值为0,目标函数中松弛变量的系数为0,故有 $w^{(0)}b = c_B B^{-1} b = c_B y_B^{(0)} = cx^{(0)}$

此处$y_B^{(0)}$表示$y^{(0)}$中基变量的取值.

根据定理4.1.1的推论1, $w(0)$是(4.1.2)的最优解,且(4.1.1)和(4.1.2)的目标函数最优值相等.类似可证,若(4.1.2)存在最优解,则(4.1.1)也存在最优解且两个问题目标函数的最优值相等.

推论1:若LP(4.1.1)存在一个对应基B的最优基本可行解,则单纯形乘子$w = c_B B^{-1}$是对偶问题(4.1.2)的一个最优解.

■ 对偶定理

互补松弛性质（对称）

定理4.1.3(互补松驰定理)若$x=(x_1,x_2,...,x_n)$和$y=(y_1,y_2,...,y_m)$分别是原始问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的可行解，则x 和y 都是相应问题的最优解当且仅当下述条件成立：

原始互补松驰条件：

$$\text{对每一}1\le j\le n\text{：要么}x_j=0\text{，要么}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i=c_j;$$

对偶互补松驰条件：

$$\text{对每一}1\le i\le n\text{：要么}y_i=0\text{，要么}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$$

■ 对偶定理

互补松弛性质（非对称）

定理4.1.4 若$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$和$y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$分别是原始问题(4.1.3)和对偶问题(4.1.4)的可行解，则x和y都是相应问题的最优解当且仅当下述条件成立：

(1)　对每一$1 \le j \le n$：若$x_j > 0, \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$;

(2)　对每一$1 \le j \le n$：若$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i < c_j, \Rightarrow x_j = 0$;

大连理工大学 Dalian University Of Technology

■ 对偶定理

例4.1.3 求解如下LP

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1+3x_2+x_3 \\
\text{s.t}\quad & 3x_1-x_2+x_3\geqslant 1 \\
& x_1+2x_2-3x_3\geqslant 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0
\end{aligned}
$$

它的对偶问题是：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & w_1+2w_2 \\
\text{s.t}\quad & 3w_1+w_2\leqslant 2 \\
& -w_1+2w_2\leqslant 3 \\
& w_1-3w_2\leqslant 1 \\
& w_1,\ w_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

■ 对偶定理

设用图解法求得对偶问题的最优解：

$$\bar{w}=(w_1, w_2)=\left(\frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

下面用互补松弛定理求原问题的最优解。

由于在最优解 $\bar{w}$ 处，对偶问题的第 3 个约束成立严格不等式，因此在原问题中第 3 个变量 $x_3=0$。又由于 $\bar{w}$ 的两个分量均大于零，因此在原问题中前两个约束在最优解处成立等式，即

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2-3x_3=2 \end{cases}$$

■ 对偶定理

把 $x_3=0$ 代入上述方程组，得到

$$\begin{cases} 3x_1-x_2=1 \\ x_1+2x_2=2 \end{cases}$$

解此方程组，得到 $x_1=\frac{4}{7}$, $x_2=\frac{5}{7}$。因此原问题的最优解是

$$\bar{x}=(x_1, x_2, x_3)^T=\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, 0\right)^T$$

目标函数的最优值 $f_{\min}=\frac{23}{7}$。

■ 作业

第四章1.2.3.4.8.10

观看运筹学课程视频
http://mooc1.chaoxing.com/course/208139968.html