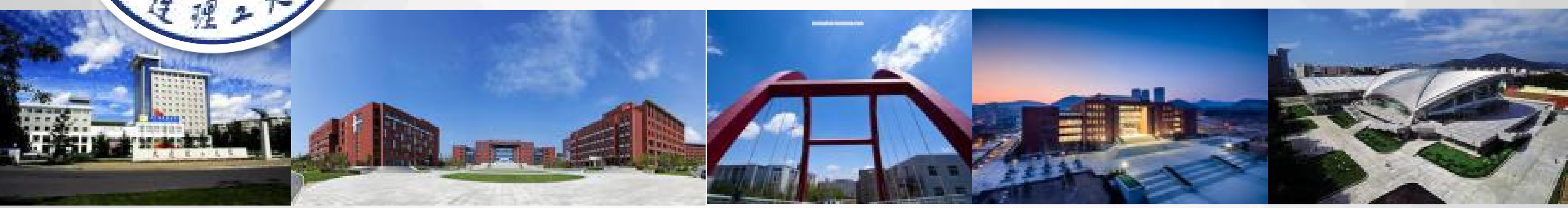
# 最优化理论
# Optimality Theory



# 目 录 (CONTENT)

04

PART Four

# 对偶理论与灵敏度分析

# Duality Theory and Sensitivity Analysis

大连理工大学 Dalian University Of Technology

## 主要内容

- 对偶理论
- 对偶单纯形法
- 原始-对偶算法
- 灵敏度分析

- 第五次作业

  - 118页习题 1、2、3、4

  - 未满足的需要继续交

## ■ 对偶问题

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 40x + 50y \\ \text{s.t.} \quad & 2x + 3y \le 3 \\ & 4x + 2y \le 2.5 \\ & x, y \ge 0. \end{aligned}$$

极大化目标函数

可行区域（单纯形）

可行解

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 3x + 2.5y \\ \text{s.t.} \quad & 2x + 4y \ge 40 \\ & 3x + 2y \ge 50 \\ & x, y \ge 0. \end{aligned}$$

极小化目标函数

可行区域（单纯形）

可行解

大连理工大学 Dalian University Of Technology

## ■ 对偶问题

对偶问题的表达式

### 1.对称形式的对偶

**Primal** Min $cx$

$$\text{s.t. } Ax \geq b, \qquad (4.1.1)$$
$$x \geq 0$$

**Dual** Max $wb$

$$\text{s.t. } wA \leq c, \qquad (4.1.2)$$
$$w \geq 0$$

## ■ 对偶问题

对偶问题的表达式

2.非对称形式的对偶

**Primal** $\quad \text{Min} \quad cx$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & Ax=b, \qquad (4.1.3) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**Dual** $\quad \text{Max} \quad wb$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & wA \leq c, \qquad (4.1.4) \\ & w\text{无约束} \end{aligned}$$

## ■ 对偶问题

对偶问题的表达式

3.一般形式的对偶

**Primal**

$$
\begin{aligned}
\min\quad & cx \\
\text{s.t}\quad & A_1x \geqslant b_1 \\
& A_2x = b_2 \\
& A_3x \leqslant b_3 \\
& x \geqslant 0
\end{aligned}
$$

**Dual**

$$
\begin{aligned}
\max\quad & w_1b_1 + w_2b_2 + w_3b_3 \\
\text{s.t}\quad & w_1A_1 + w_2A_2 + w_3A_3 \leqslant c \\
& w_1 \geqslant 0 \\
& w_3 \leqslant 0 \\
& w_2 \text{ 无限制}
\end{aligned}
$$

## ■ 对偶问题

以上分析可知有如下关系

原问题和对偶问题的对偶约束之间的关系：

| 原问题（P） min | | 对偶问题（D） max | |
|---|---|---|---|
| 变量 | ≥0 | 行约束 | ≤ |
| | ≤0 | | ≥ |
| | 无限制 | | = |
| 行约束 | ≥ | 变量 | ≥0 |
| | ≤ | | ≤0 |
| | = | | 无限制 |

## ■ 对偶定理

注意到,原问题和对偶问题是由同一数据集(A,b,c)所定义,且**对偶问题的对偶即是原问题**，因此可以选原始-对偶对中任一为原问题，而另一个则自动为对偶。下面讨论两者间的关系。

**Primal** **Min cx**

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & Ax \geq b, \qquad (4.1.1) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**Dual** **Max wb**

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & wA \leq c, \qquad (4.1.2) \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

## ■ 对偶定理

定理4.1.1 设$x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是(4.1.1)和(4.1.2)的可行解，

则 $cx^{(0)} \geq w^{(0)}b.$

推论1 若 $x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是原问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的可行解，且$cx^{(0)} = w^{(0)}b$,则$x^{(0)}$和$w^{(0)}$分别是原问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的最优解。

推论2 对偶规划(4.1.1)和(4.1.2)有最优解的充要条件是**它们同时有可行解**。

推论3 若原问题(4.1.1)的目标函数值在可行域上无下界,则其对偶问题无可行解;反之,若对偶(4.1.2)的目标函数值在可行域上无上界,则原问题无可行解.

## ■ 对偶定理

| P \ D | 有限最优解 | 无界 | 不可行 |
| --- | --- | --- | --- |
| 有限最优解 | ♠ | × | × |
| 无界 | × | × | ♣ |
| 不可行 | × | ♣ | ♥ |

**定理4.1.2 设(4.1.1)和(4.1.2)中有一个问题存在最优解，则另一个问题也存在最优解，且这两个问题的最优目标函数值相等。**

推论1：若$LP$(4.1.1)存在一个对应基$B$的最优基本可行解，则单纯形乘子$w = c_B B^{-1}$是对偶问题(4.1.2)的一个最优解.

## ■ 对偶定理

互补松弛性质（对称）

定理4.1.3(互补松弛定理)若$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$和$y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$分别是原始问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的可行解，则$x$ 和$y$ 都是相应问题的最优解当且仅当下述条件成立：

原始互补松弛条件：

$$\text{对每一}1\le j\le n\text{：要么}x_j=0\text{，要么}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i=c_j;$$

对偶互补松弛条件：

$$\text{对每一}1\le i\le n\text{：要么}y_i=0\text{，要么}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$$

## ■ 对偶定理

互补松弛性质（非对称）

定理4.1.4 若$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$和$y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$分别是原始问题(4.1.3)和对偶问题(4.1.4)的可行解，则$x$和$y$都是相应问题的最优解当且仅当下述条件成立：

(1)　对每一$1 \le j \le n$：若$x_j > 0, \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$;

(2)　对每一$1 \le j \le n$：若$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i < c_j, \Rightarrow x_j = 0$;

## ■ 对偶定理

例4.1.3 求解如下LP

$$\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1+3x_2+x_3 \\
\text{s.t}\quad & 3x_1-x_2+x_3\geqslant 1 \\
& x_1+2x_2-3x_3\geqslant 2 \\
& x_1, x_2, x_3\geqslant 0
\end{aligned}$$

它的对偶问题是:

$$\begin{aligned}
\max\quad & w_1+2w_2 \\
\text{s.t}\quad & 3w_1+w_2\leqslant 2 \\
& -w_1+2w_2\leqslant 3 \\
& w_1-3w_2\leqslant 1 \\
& w_1, w_2\geqslant 0
\end{aligned}$$

## ■ 对偶定理

设用图解法求得对偶问题的最优解：

$$\bar{w}=(w_1,\ w_2)=\left(\frac{1}{7},\ \frac{11}{7}\right)$$

下面用互补松弛定理求原问题的最优解。

由于在最优解 $\bar{w}$ 处，对偶问题的第 3 个约束成立严格不等式，因此在原问题中第 3 个变量 $x_3=0$。又由于 $\bar{w}$ 的两个分量均大于零，因此在原问题中前两个约束在最优解处成立等式，即

$$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=1\\ x_1+2x_2-3x_3=2\end{cases}$$

## ■ 对偶定理

把 $x_3=0$ 代入上述方程组，得到

$$\begin{cases} 3x_1-x_2=1 \\ x_1+2x_2=2 \end{cases}$$

解此方程组，得到 $x_1=\frac{4}{7}$，$x_2=\frac{5}{7}$。因此原问题的最优解是

$$\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T=\left(\frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ 0\right)^T$$

目标函数的最优值 $f_{\min}=\frac{23}{7}$。

## ■ 对偶单纯形法

考虑线性规划:

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ s.t.\quad &Ax=b, \qquad\qquad (4.2.1) \\ &x\geq 0 \end{aligned}$$

定义4.2.1设$x^{(0)}$是(4.2.1)的一个基本解,它对应的基矩阵为$B$,记做$w=c_B B^{-1}$,若$w$是(4.2.1)的对偶问题的可行解,即对所有$j$成立$wp_j - c_j \leq 0$,则称$x^{(0)}$为原问题的对偶可行的基本解.

## ■ 对偶单纯形法

注:对偶可行的基本解不一定是原问题的可行解. 若还是原问题的可行解, 则此解即为最优解.

单纯形法的基本思路是保持原问题的可行性和互补松弛条件下, 在它的最优解上寻求对偶问题的可行性.

类似的, 对偶单纯形法的基本思路是:在保持对偶可行性和互补松弛条件下, 在它的最优解上寻求原问题的可行性.

## ■ 对偶单纯形法

设从基矩阵$B$开始,由它形成对偶可行解$w$,使得

$$w^T = c_B^T B^{-1},\ A^T w - c^T \le 0$$

进一步定义:
$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$Ax = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = b$$

$$r^T x = (c^T - w^T A)x = c^T x - w^T Ax = c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}b = 0$$

## ■ 对偶单纯形法

因此,对偶可行性和互补松弛条件在此情况下得以满足.

但除非$x_B = B^{-1}b \geq 0$,原可行性才会被满足.换言之,在达到

最优解前, 至少存在一个$p \in B$(原问题基变量的下标集)

使得$x_p < 0$,对偶单纯形法将重置$x_B = 0$(即是从基变量中

结束$x_p$),以及选择一个适当的非基变量$x_q \notin B$进基.当然

在旋转运算中对偶可行性和互补松弛条件将被保持(关键)

## ■ 对偶单纯形法

下面分析如何选取离基变量和进基变量. 设在某次迭代中得到如下表:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $\cdots$ | $x_j$ | $\cdots$ | $x_k$ | $\cdots$ | $x_n$ | |
| $x_{B_1}$ | $y_{11}$ | $\cdots$ | $y_{1j}$ | $\cdots$ | $y_{1k}$ | $\cdots$ | $y_{1n}$ | $\bar{b}_1$ |
| M | M | | M | | M | | M | M |
| $x_{B_r}$ | $y_{r1}$ | $\cdots$ | $y_{rj}$ | $\cdots$ | $y_{rk}$ | $\cdots$ | $y_{rn}$ | $\bar{b}_r$ |
| M | M | | M | | M | | M | M |
| $x_{B_m}$ | $y_{m1}$ | $\cdots$ | $y_{mj}$ | $\cdots$ | $y_{mk}$ | $\cdots$ | $y_{mn}$ | $\bar{b}_m$ |
| | $z_1-c_1$ | $\cdots$ | $z_j-c_j$ | $\cdots$ | $z_k-c_k$ | $\cdots$ | $z_n-c_n$ | $c_BB^{-1}b$ |

大连理工大学 Dalian University Of Technology

## ■ 对偶单纯形法

表中判别数 $z_j-c_j\leqslant 0$, $j=1, \cdots, n$。

如果右端列

$$\bar{b}=(\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_r, \cdots, \bar{b}_m)^T\geqslant 0$$

则现行基本解是最优基本可行解。

如果 $\bar{b}\ngeqslant 0$, 则现行的基本解 $x_B=\bar{b}$, $x_N=0$ 是对偶可行的基本解，但不是原问题的可行解。这时，需确定离基变量和进基变量，求改进的对偶可行的基本解。

## 对偶单纯形法

在对偶单纯形法中，先选择离基变量。为了在保持对偶可行的条件下求得原问题的可行解，应选择取负值的基变量作为离基变量。如果 $\bar{b}_r<0$，则取 $x_{B_r}$ 为离基变量。然后再确定进基变量。为保持对偶可行性，需用 $r$ 行的负元去除相应的判别数，从中选择最小比值，令

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \middle| y_{rj} < 0 \right\} \qquad (4.2.2)$$

则 $x_k$ 作为进基变量。以 $y_{rk}$ 为主元进行主元消去，实现基的转换，得到新的对偶可行的基本解。

## ■ 对偶单纯形法

下面说明上述转换能改进对偶可行的基本解.

1)由于主元消去前$y_{rk}$和$b_r$同为负数,故主元消去后右端列第r个分量变成正数.这有利于基本解朝着满足可行性的方向转化.

2)主元消去后仍然保持对偶可行性,即所有判别数都小于或等于0(对极小化问题)

主元消去运算后,判别数

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} y_{rj} \qquad (4.2.3)$$

等号右端是主元消去前的数据,且$\dfrac{z_k - c_k}{y_{rk}} \geq 0$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

## 对偶单纯形法

若$y_{rj} \geq 0$，则

$$(z_j - c_j)' \leq (z_j - c_j) \leq 0 \qquad (4.2.4)$$

若$y_{rj} \leq 0$，则由(4.2.2)知

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \leq \frac{z_j - c_j}{y_{rj}}$$

于是 $$z_j - c_j \leq \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} y_{rj} \Rightarrow (z_j - c_j)' \leq 0 \qquad (4.2.5)$$

## ■ 对偶单纯形法

3)主元消去运算后,对偶问题的目标函数值增大（至少不减小）

考虑对偶单纯形表中数据 $c_B\overline{b} = c_B B^{-1} b = wb$

它既是原问题在对偶可行的基本解（未必可行）处的目标函数值, 也是对偶问题在可行解w处的目标函数值. 主元消去前后目标函数值之间的关系是:

$$(c_B\overline{b})^{New} = c_B\overline{b} - \frac{z_k - c_k}{y_{rk}}\overline{b}_r \qquad (4.2.6)$$

由于 $\frac{z_k - c_k}{y_{rk}}\overline{b}_r \leq 0$

故 $(c_B\overline{b})' \geq c_B\overline{b} \qquad (4.2.7)$

即对偶问题的目标函数值在迭代过程中单调增(非减).

## ■ 对偶单纯形法

对偶问题的可行解$w$越来越接近最优解. 原问题的对偶可行的基本解将向着满足可行性方向转化而接近原问题最优解.

注 : 在迭代中可能出现 : 当$\overline{b}_r < 0$时, $r$行无负元, 因此不能确定下标$k$. 这表明原问题中的变量取任何非负值时均不能满足第$r$个方程因此无可行解.

## ■ 对偶单纯形法

**对偶单纯形法**

1, 给定初始对偶可行的基本解,其相应的基为$B$.

2, 若$\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$,终止,现行对偶可行的基本解即最优解.否则,令

$$\bar{b}_r = \min_i \{\bar{b}_i\}$$

3,若对所有$j$, $y_{rj} \geq 0$,终止,原问题无可行解,否则令

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \middle| y_{rj} < 0 \right\}$$

4,以$y_{rk}$为主元进行主元消去,转2.

## ■ 对偶单纯形法

例1 用对偶单纯形法解下列问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 12x_1+8x_2+16x_3+12x_4 \\
\text{s.t} \quad & 2x_1+x_2+4x_3 \geqslant 2 \\
& 2x_1+2x_2+4x_4 \geqslant 3 \\
& x_j \geqslant 0,\ j=1,\cdots,4
\end{aligned}
$$

先引进松弛变量 $x_5$, $x_6$, 把上述问题化成标准形式:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 12x_1+8x_2+16x_3+12x_4 \\
\text{s.t} \quad & 2x_1+x_2+4x_3-x_5=2 \\
& 2x_1+2x_2+4x_4-x_6=3 \\
& x_j \geqslant 0,\ j=1,\cdots,6
\end{aligned}
$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

## ■ 对偶单纯形法

为得到一对偶可行的基本解，将每个约束方乘两端乘以(-1)，于是得到一基本解（它是对偶可行）

$$(x_5, x_6) = (-2, -3), \quad x_j = 0, j = 1, 2, 3, 4$$

$$\overline{b}_2 = \min\{-2, -3\}$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_5$ | $-2$ | $-1$ | $-4$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-2$ |
| $x_6$ | $-2$ | $-2$ | $0$ | $-4$ | $0$ | $1$ | $-3$ |
| | $-12$ | $-8$ | $-16$ | $-12$ | $0$ | $0$ | $0$ |

$$\frac{z_4 - c_4}{y_{24}} = \min\left\{\frac{-12}{-2}, \frac{-8}{-2}, \frac{-12}{-4}\right\} = \frac{-12}{-4}$$

## ■ 对偶单纯形法

$\bar{b}_1 = \min\{-2\}$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_5$ | $-2$ | $-1$ | $-4$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-2$ |
| $x_4$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{-3}{4}$ |
| | $-6$ | $-2$ | $-16$ | $0$ | $0$ | $-3$ | $9$ |

$$\frac{z_2 - c_2}{y_{12}} = \min\left\{\frac{-6}{-2}, \frac{-2}{-1}, \frac{-16}{-4}\right\} = \frac{-2}{-1}$$

## ■ 对偶单纯形法

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 2 | 1 | 4 | 0 | $-1$ | 0 | 2 |
| $x_4$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-2$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{-1}{4}$ |
| | $-2$ | 0 | $-8$ | 0 | $-2$ | $-3$ | 13 |

$\bar{b}_2 = \min\{-1/4\}$

$$\frac{z_1 - c_1}{y_{21}} = \frac{z_3 - c_3}{y_{23}} = \min\left\{\frac{-2}{-\frac{1}{2}}, \frac{-8}{-2}, \frac{-3}{-\frac{1}{4}}\right\}$$

## ■ 对偶单纯形法

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | $-4$ | 4 | 1 | $-1$ | 1 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 4 | $-2$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | 0 | 0 | 0 | $-4$ | $-4$ | $-2$ | 14 |

## 灵敏度分析

- 1，引入
- 2，改变系数向量c
- 3，改变右端向量b
- 4，改变约束矩阵A
- 5，增加新的约束

## ■ 灵敏度分析-引入

在大多数实际问题中,不仅要求求出问题的最优解，而且还希望知道当问题中的某些参数改变时最优解怎样变动。参数的变化可分为**离散的**和**连续的**两种。

灵敏度分析是指对系统或事物因周围条件离散变化显示出来的敏感程度的分析，即对最优解的影响进行分析研究。

而参数规划则是研究参数连续的变化时对最优解的影响

## ■ 灵敏度分析-引入

前面讲的线性规划问题中，都假定问题中 $a_{ij}, b_i, c_j$ 是已知常数。但实际上这些数往往是一些估计和预测的数字

市场条件变化，价值变量 $c_j$就会变化

$a_{ij}$是随工艺技术条件的改变而改变

而值$b_i$则是根据资源投入后能产生多大经济效益来决定的一种决策选择.

因此就会提出以下问题：

当这些参数中的一个或几个发生变化时，问题的最优解会有什么变化?

这些参数在一个多大范围内变化时，问题的最优解变不变?

这就是灵敏度分析所要研究解决的问题。

## 灵敏度分析-引入

影响最优解的参数有如下几类：

- 改变费用系数$c_j$
- 改变右端费用$b_i$
- 改变约束方程的系数矩阵**A**
- 加入新的约束

参数变化后的结果

- ✓最优解不变：最优基及其取值不变
- ✓基变量不变但取值改变
- ✓基变量改变，取值亦改变

## ■ 灵敏度分析-引入

重新解新线性规划问题?

重新计算发生变化的个别系数,判断问题现状,采取如下措施

| 原问题 | 对偶问题 | 结论或继续计算的步骤 |
|---|---|---|
| 可行解 | 可行解 | 问题的最优解或最优基不变 |
| 可行解 | 非可行解 | 用单纯形法继续迭代求最优解 |
| 非可行解 | 可行解 | 对偶单纯形法继续迭代求最优解 |
| 非可行解 | 非可行解 | 原始/对偶单纯形算法<br>或引进人工变量，编制新的单纯形表重新计算 |

## 灵敏度分析-改变系数向量

考虑标准LP问题为

$$\min c^{\mathrm{T}} x \quad s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4.4.1)}$$

假定得到最优单纯形表如下

| | $x_B$ | $x_N$ | RHS |
|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | $\boxed{c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N^{\mathrm{T}}}$ | $\boxed{c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b}$ |
| $x_B$ | $I$ | $B^{-1} N$ | $B^{-1} b$ |

最优基本可行解$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$及最优值$z^* = \boldsymbol{c}_B^T \bar{\boldsymbol{b}}$;

## 灵敏度分析-改变系数向量

当价值向量$c$改变时，在单纯形表里受影响的只是检验数和目标函数值，其它没有改变，因而只需计算新的检验数和目标函数值

$$\xi_N'^{T} = c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N'^{\mathrm{T}}$$

$$z_0' = c'^{\mathrm{T}} x = c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1} b$$

如果检验数非正，则原最优解依然是最优解；

否则是基本可行解，以此为初始基可行解按单纯形法进行迭代就可以求出新问题的解。

## ■ 灵敏度分析-改变系数向量

**当变量$x_k$改变时，**即价值向量只有一个分量 **$c_k$变成$c'_k$时，**

**1、情形I:$x_k$是非基变量**

改变非基变量的价值向量 $c_k \to c'_k$

由单纯形法计算公式知，只有检验数 $\xi_k$ 起变化,

新的检验数

$$\xi'_k = c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1} A_k - c'_k = c_B^{\mathrm{T}} \overline{A}_k - c'_k$$

$$= c_B^{\mathrm{T}} \overline{A}_k - c_k + c_k - c'_k = \xi_k + (c_k - c'_k)$$

若 $\xi'_k \le 0$ ，则原最优解依然是最优解；

否则，由此进行单纯形迭代。

## ■ 灵敏度分析-改变系数向量

### 2、情形II: $x_k$是基变量

问题最后一张单纯形表中，改变基变量 $x_k$的价值向量 $c_k \to c_k'$，

基变量对应的约束为第 $l$个, 即 $\boldsymbol{x_k = b_l}$

新检验数(因基变量检验数要求＝0) G555555555555555H

$$\xi_N' = c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N'^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N^{\mathrm{T}} + (0, \mathrm{K}\ , 0, c_k' - c_k, 0, \mathrm{K}\ , 0) B^{-1} N}$$

$$= \xi_N^T + (c_k' - c_k)(B^{-1}N)^{(l)}$$

$\boldsymbol{(B^{-1}N)^{(l)}}$表示$\boldsymbol{B^{-1}N}$的第$\boldsymbol{l}$行元素

新目标函数值

$$\boldsymbol{c_B'^{\mathrm{T}} B^{-1} b = c_B'^{\mathrm{T}} \overline{b}} \quad \boldsymbol{= c_B^{\mathrm{T}} \overline{b} + (c_k' - c_k) \overline{b}_l}$$

## ■ 灵敏度分析-改变系数向量

总之

把单纯形表上的第L行元素乘以$(c_k' - c_k)$ 加到检验数行上，

再令 $\boxed{\xi_k' = 0,}$ 得到对应新问题的单纯形表。

## ■ 灵敏度分析-改变系数向量

**例1** min $z' = -2x_1 - 3x_2 - x_3$

st

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 15\\
2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 &= 18\\
x_1 - x_2 + x_3 + x_6 &= 3\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\ge 0
\end{aligned}
$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z'$ | 0 | 0 | 0 | -5/6 | -1/3 | -1/2 | -20 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/4 | 0 | -1/4 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -1/6 | 1/3 | 1/2 | 5 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 5/12 | -1/3 | 1/4 | 1 |

最优解:$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(5,3,1,0,0,0)$

## 灵敏度分析-改变系数向量

非基变量

若$c_4$由0变成2，由于$x_4$是非基变量，故只需计算$\xi_4'$

$$\xi_4' = \xi_4 + (c_4 - c_4') = -\frac{5}{6} + (0-2) = -\frac{17}{6}$$

检验数仍非负，问题原最优解仍是此时最优解；

对非基变量的价值系数在某范围变化最优解都不发生改变

$$\xi_4' = \xi_4 + (c_4 - c_4') = -\frac{5}{6} + (0 - c_4') \le 0$$

$\Rightarrow c_4' \ge -\frac{5}{6}$ 最优解都不发生改变

同理

$\Rightarrow c_5' \ge -\frac{1}{3}$ $c_6' \ge -\frac{1}{2}$ 最优解都不发生改变

$\Rightarrow c_{Ni}' \ge \xi_i$ 最优解都不发生改变

## ■ 灵敏度分析-改变系数向量

基变量

若$c_3$由−1变成1，由于$x_3$是基变量，

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z’ | 0 | 0 | 0 | -5/6 | -1/3 | -1/2 | -20 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/4 | 0 | -1/4 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -1/6 | 1/3 | 1/2 | 5 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 5/12 | -1/3 | 1/4 | 1 |

把最优单纯形表的第3行乘以[ 1-(-1) ]加到检验数行上

## ■ 灵敏度分析-改变系数向量

再令 $\xi_3' = 0$， 得到对应新问题的单纯形表

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -18 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/4 | 0 | -1/4 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -1/6 | 1/3 | 1/2 | 5 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 5/12 | 1/3 | 1/4 | 1 |

若检验数向量非正数，故仍最优解，

否则用单纯形算法即可。

## ■ 灵敏度分析-改变右端向量

### 1. 基本思想

| | $x_B$ | $x_N$ | RHS | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $0$ | $c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N^{\mathrm{T}}$ | $c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b$ | $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{b}}$ |
| $x_B$ | $I$ | $B^{-1} N$ | $B^{-1} b$ | $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}$ |

$$\overline{b}' = B^{-1} b' \qquad z_0' = c_B^{\mathrm{T}} \overline{b}'$$

如果 $\overline{b}' \geq 0$，则已发现新问题的最优解， $z_0' = c_B^{\mathrm{T}} \overline{b}'$

否则利用对偶单纯形算法求解新问题。

## ■ 灵敏度分析-改变右端向量

当只改变一个分量时： $b_r \to b_r'$

$$\bar{b}' = B^{-1}b' = B^{-1}(b + b' - b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b$$

$$= B^{-1}b + (b_r' - b_r)B_r^{-1}$$

$$B^{-1}\Delta b = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_r' - b_r \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 $B_r^{-1}$ 为 $B^{-1}$ 的第 r 列。

因新问题的单纯形表检验数向量不变，仍有 $\xi' = \xi \le 0$

如果 $\bar{b}' \ge 0$，则已发现新问题的最优解. $z_0' = c_B^{\mathrm{T}}\bar{b}'$

否则，单纯形表对应新问题的一个基本(不可行)解和对偶问题的一个可行解， 故可用对偶单纯形法继续求解。

## ■ 灵敏度分析-改变右端向量

续上例

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z' = -2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
\text{st}\quad & x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 18 \\
& x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z’ | 0 | 0 | 0 | -5/6 | -1/3 | -1/2 | -20 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/4 | 0 | -1/4 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -1/6 | 1/3 | 1/2 | 5 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 5/12 | -1/3 | 1/4 | 1 |

$b_3$由3变成5时，$\overline{b'} = \overline{b} + (b_3' - b_3)B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + (5-3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 6 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \geq 0$

仍是最优基本可行解。

看出$B = (A_2, A_1, A_3)$，故$c_B^T = (-3, -2, -1)$ $\quad \therefore z_0' = c_B^T \cdot \overline{b'} = -21$

## ■ 灵敏度分析-改变右端向量

$b_3$由3变成19时，$\overline{b}' = \overline{b} + (b_3' - b_3)B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + (19-3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$

单纯形表对应新问题的一个基本(不可行)解和

对偶问题的一个可行解，故可用对偶单纯形法继续求解。

$z_0' = c_B^T \cdot \overline{b}' = -28$　　此时单纯形表

| | z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | | 0 | 0 | 0 | -5/6 | -1/3 | -1/2 | -28 |
| $x_2$ | | 0 | 1 | 0 | 1/4 | 0 | -1/4 | -1 |
| $x_1$ | | 1 | 0 | 0 | -1/6 | 1/3 | 1/2 | 13 |
| $x_3$ | | 0 | 0 | 1 | 5/12 | -1/3 | 1/4 | 5 |

## 灵敏度分析-改变约束矩阵

有如下两种情形

**(1)非基列**$p_j \to p'_j$

此变化直接影到判别数$z_j - c_j$及单纯形表中第$j$列$y_j$，

改变后，有

$$z'_j - c_j = c_B B^{-1} p'_j - c_j, y'_j = B^{-1} p'_j$$

(*i*)若$z'_j - c_j \le 0$,则原来的最优基仍是最优基;

(*ii*)若$z'_j - c_j > 0$,则原来的最优基在非退化情形不再是最优基，此时需要修改第$j$列$y_j \to y'_j$,判别数$z_j - c_j \to z'_j - c_j$,然后把$x_j$作为进基变量继续迭代。

## ■ 灵敏度分析-改变约束矩阵

(2)基列$p_j \to p'_j$

此时情况较复杂，若只有少数列发生变化可用如下方法

不妨设$p_j \to p'_j = p_j + \Delta p_j$

(1)在原方程组中加入一新的变量$x_{n+1}$,令该变量的

约束系数为 $p_{\mathrm{n+1}} = p_j + \Delta p_j$

其费用系数为 $c_{n+1} = c_j$

(2)用原最优基底的逆，$pB^{-1} = (\beta_{ij})$将系数$a_{i,n+1} \to \overline{a}_{i,n+1}$：

$$\overline{a}_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} a_{j,n+1}, i = 1,2,\ldots m.$$

## ■ 灵敏度分析-改变约束矩阵

(3)用一个大的正数M取代$x_j$的原费用系数，但保持$c_{n+1}$仍等于原$c_j$

(4)按4.4.4小节的方法计算$c_j \to c_j' = M$后的判别数

$$\xi_N = c_B^T B^{-1} N - c_N^T + (0, \dots, 0, c_j' - c_j, 0, \dots, 0) B^{-1} N$$

(5)至此,可用正规的单纯形法进行迭代,用新的目标函数及(4)及(2)中式子求出的增广矩阵进行自到找出新的最优解为止.

## ■ 灵敏度分析-改变约束矩阵

注:(1)M必须充分大使得$x_j$不会在新的最优基出现.

(2)很容易将其推广到多列改变的情况,但计算量会很大,故矩阵中元素改变很多时重新来算反而更省计算量。

## ■ 灵敏度分析-加入新的约束

设原有约束为$Ax=b$，在此基础上，我们增加一个新的约束

$$p^{m+1}x \le b_{m+1}$$

(1)若原来的最优解仍满足新的约束,则它仍是问题的最优解

(2)若原问题的最优解不满足新的约束，则需要把新的约束条件增加到原来的最优表中再解新问题。

设原来的最优基为$B$。最优解为

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 灵敏度分析-加入新的约束

新增加的约束在放入单纯形表之前,引入松弛变量$x_{n+1}$化为等式约束,记

$$p^{m+1}=\begin{bmatrix} p_B^{m+1} & p_N^{m+1} \end{bmatrix},$$

把(4.4.9)写成

$$p_B^{m+1}x_B+p_N^{m+1}x_N+x_{n+1}=b_{m+1} \qquad (4.4.10)$$

增加约束后,新的基$B'$,$(B')^{-1}$及右端向量$b'$如下：

$$B'=\begin{bmatrix} B & 0 \\ p_B^{m+1} & 1 \end{bmatrix},(B')^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -p_B^{m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix},b=\begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix}$$

## ■ 灵敏度分析-加入新的约束

对于增加约束后的新问题，在现行基下对应变量$x_j\,(j \neq n+1)$的检验数是

$$z'_j - c_j = c'_B (B')^{-1} p'_j - c_j$$

$$= (c_B, 0)\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -p_B^{m+1} B^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_j \\ p_j^{m+1} \end{bmatrix} - c_j$$

$$= c_B B^{-1} p_j - c_j = z_j - c_j \qquad (4.4.11)$$

与不增加约束时相同。而$x_{n+1}$的检验数是

$$z'_{n+1} - c_{n+1} = c'_B (B')^{-1} e_{n+1} - c_{n+1}$$

$$= (c_B, 0)\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -p_B^{m+1} B^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0$$

$$= 0 \qquad (4.4.12)$$

## ■ 灵敏度分析-加入新的约束

现行的基本解为:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = (B')^{-1}\begin{pmatrix} b \\ b_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -p_B^{m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ b_{m+1} - p_B^{m+1}B^{-1}b \end{bmatrix}$$

$$x_N = 0 \qquad (4.4.13)$$

由(4.1.11–12)知上述基本解是对偶可行的.

由于$x_B = B^{-1}b, x_N = 0$为原问题的最优解, 故若$b_{m+1} - p_B^{m+1}B^{-1}b \geq 0$, 则现行的对偶可行的基本解即为最优.否则可用对偶单纯形法求解.

## ■ 灵敏度分析-加入新的约束

把新增加的约束在放入原来最优单纯形表中,不妨设如如下形式

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_B & x_N & x_{n+1} & \\
\hline
x_B & I_m & \mathrm{B}^{-1}\mathrm{N} & 0 & \mathrm{B}^{-1}\mathrm{b} \\
x_{n+1} & p_B^{m+1} & p_N^{m+1} & 1 & b_{m+1} \\
\hline
 & 0 & c_B B^{-1} N - c_N & 0 & c_B B^{-1}
\end{array}
$$

左乘$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ p_B^{m+1} & 1 \end{bmatrix}$,将表中$x_B, x_{n+1}$下的矩阵化为单位阵

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_B & x_N & x_{n+1} & \\
\hline
x_B & I_m & \mathrm{B}^{-1}\mathrm{N} & 0 & \mathrm{B}^{-1}\mathrm{b} \\
x_{n+1} & 0 & p_N^{m+1} & 1 & b_{m+1} - p_B^{m+1}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{b} \\
\hline
 & 0 & c_B B^{-1} N - c_N & 0 & c_B B^{-1}
\end{array}
$$

大连理工大学 Dalian University Of Technology

## ■ 灵敏度分析-加入新的约束

例3 考虑LP:

$$\min\ x_1 + x_2 - 4x_3$$
$$s.t.\ \ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \le 4$$
$$x_i \ge 0$$

最优解$x = (x_1, x_2, x_3) = (1/3, 6, 13/3)$

最优单纯形表如下

现增加新的约束 $-3x_1 + x_2 + 6x_3 \le 17$

考虑新问题的最优解

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $-1/3$ | 0 | $1/3$ | 0 | $-2/3$ | $1/3$ |
| $x_5$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| $x_3$ | 0 | $2/3$ | 1 | $1/3$ | 0 | $1/3$ | $13/3$ |
| | 0 | $-4$ | 0 | $-1$ | 0 | $-2$ | $-17$ |

## 灵敏度分析-加入新的约束

将增加的约束化为等式并将此约束方程的系数置于原来的最优表相应的添加一列到原单纯形表：

$$-3x_1 + x_2 + 6x_3 + x_7 = 17$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $-1/3$ | 0 | $1/3$ | 0 | $-2/3$ | 0 | $1/3$ |
| $x_5$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| $x_3$ | 0 | $2/3$ | 1 | $1/3$ | 0 | $1/3$ | 0 | $13/3$ |
| $x_7$ | -3 | 1 | 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 17 |
| | 0 | $-4$ | 0 | $-1$ | 0 | $-2$ | 0 | $-17$ |

## ■ 灵敏度分析-加入新的约束

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $-1/3$ | 0 | $1/3$ | 0 | $-2/3$ | 0 | $1/3$ |
| $x_5$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| $x_3$ | 0 | $2/3$ | 1 | $1/3$ | 0 | $1/3$ | 0 | $13/3$ |
| $x_7$ | 0 | $-4$ | 0 | $-1$ | 0 | $-4$ | 1 | $-8$ |
| | 0 | $-4$ | 0 | $-1$ | 0 | $-2$ | 0 | $-17$ |

## ■ 灵敏度分析-加入新的约束

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $1/3$ | 0 | $1/2$ | 0 | 0 | $-1/6$ | $5/3$ |
| $x_5$ | 0 | 1 | 0 | $-1/4$ | 1 | 0 | $1/4$ | 4 |
| $x_3$ | 0 | $1/3$ | 1 | $1/4$ | 0 | 0 | $1/12$ | $11/3$ |
| $x_6$ | 0 | 1 | 0 | $1/4$ | 0 | 1 | $-1/4$ | 2 |
| | 0 | $-2$ | 0 | $-1/2$ | 0 | 0 | $-1/2$ | $-13$ |

## 灵敏度分析

### 总结:

在现实中市场因素(价值系数) , 生产资料(右端向量), 生产技术(矩阵元素)随时在变化, 而参数的变化必然引起模型的变化

当原问题只有个别数据改变, 特别是变化幅度不大时, 用灵敏度分析比对新问题重新求解简单,

## ■ 作业

**第四章1.2.3.4.7.10**

**观看运筹学课程视频**
**http://mooc1.chaoxing.com/course/208139968.html**